



# THÈSE

## En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier

---

Présentée et soutenue par  
**Benjamin EVANO**

Le 15 octobre 2019

**Analyse semiclassique des modes d'oscillation chaotiques dans  
les étoiles en rotation rapide**

---

Ecole doctorale : **SDU2E - Sciences de l'Univers, de l'Environnement et de  
l'Espace**

Spécialité : **Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie**

Unité de recherche :  
**IRAP - Institut de Recherche en Astrophysique et Planetologie**

Thèse dirigée par  
**François LIGNIERES et Bertrand GEORGEOT**

Jury

M. Sergey SKIPETROV, Rapporteur  
M. Marc-Antoine DUPRET, Rapporteur  
M. Olivier GIRAUD, Examineur  
M. Daniel REESE, Examineur  
M. François LIGNIERES, Directeur de thèse  
M. Bertrand GEORGEOT, Co-directeur de thèse  
Mme Marie-Jo GOUPIL, Président



# Remerciements

Je souhaite remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réussite et au bon déroulement de cette thèse. Avant tout, je suis très reconnaissant envers mes directeurs de thèse, François et Bertrand, pour m'avoir accepté puis aiguillé tout au long de ces trois années, en se montrant toujours disponibles. Je les remercie également pour leur sympathie et leur relecture critique du manuscrit. Merci également aux membres du jury, Marc-Antoine Dupret, Sergey Skipetrov, Marie-Jo Goupil, Daniel Reese et Olivier Giraud, qui ont donné de leur temps pour me lire et m'écouter. Je tiens à souligner la pertinence de leurs questions lors de la soutenance, qui témoigne d'un réel intérêt pour la thèse. Merci encore aux membres du comité de suivi, Arturo López Ariste, Olivier Giraud (présent sur tous les fronts) et Sylvie Vauclair.

Mon sujet de thèse a pour spécificité de réunir deux sujets en apparence distants, d'un côté l'astérosismologie et de l'autre le chaos quantique. Pas si distants en réalité, car il suffit de traverser le canal du midi pour réunir des spécialistes de ces deux disciplines. Au cours de ma thèse j'ai ainsi oscillé, quasipériodiquement, entre l'IRAP (côté Est du canal) et le LPT (côté Ouest).

À L'IRAP, je suis heureux d'avoir passé trois ans dans l'équipe PS2E. Je garde tout particulièrement un bon souvenir des workshops de l'équipe, qui choisit toujours avec soin la destination, entre montagnes et châteaux. Merci à mes co-détenus du bureau P116, les malicieux Damien et Gaylor, à tous les doctorants du labo, aux post-docs même si je les côtoyais peu et aux chercheurs permanents, aux membres de l'association Universciel pour leur énergie, à Edo et Baptiste pour avoir si bien organisé la vie doctorante. Un grand merci enfin à Bertrand Putigny, qui m'a guidé dans l'utilisation du programme TOP et m'a bien aidé à déchiffrer les erreurs de compilation les plus abstruses.

Un tour à la cafétéria du LPT, siège d'une authentique machine à café de bar, suffit à comprendre pourquoi je me suis senti si bien dans ce laboratoire. J'ai beaucoup apprécié le temps passé avec tous les doctorants du grand bureau, Bertrand Jayles, Benjamin Senior, Wei-Lin, Julie (et ses vésicules bleues et rouges de toute beauté), Jordan, Hugo et le petit dernier Théo. Idem pour le bureau d'en face, avec Dupont, Martinez (enfin quelqu'un pour parler du chaos !) et Olivier, compagnon d'infortune dans ce mois d'Août étouffant. Bien sûr, il faudrait étendre la liste aux post-docs, aux stagiaires, à ce cher Agustin et à tous ceux que j'oublie. Je remercie pour finir Malika et Sandrine, qui m'ont bien facilité la vie.

Je voudrais aussi remercier Pierre Jean et Pierrick Martin, mes directeurs de stage de M2. Ça n'a pas été facile pour moi de trouver un stage, et je les remercie de m'avoir accepté, malgré mon cursus sans astrophysique. Ce stage fût véritablement une porte d'entrée vers la thèse, même si je me suis tourné ensuite vers un sujet bien différent.

Pour finir, je remercie ma famille et mes amis pour leur soutien de longue date, et surtout Natalia pour son affection et son indispensable présence au cours de cette dernière année de thèse.





# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Sismologie des étoiles en rotation rapide</b>	<b>5</b>
1.1 Caractéristiques des étoiles pulsantes . . . . .	6
1.1.1 Techniques d'observation . . . . .	6
1.1.2 Pulsateurs classiques et de type solaire . . . . .	7
1.1.3 Modes p et g dans une étoile sphérique. . . . .	11
1.2 Modes de pression dans les pulsateurs classiques en rotation rapide . .	15
1.2.1 Étoiles en rotation rapide . . . . .	15
1.2.2 Régularités des modes p dans les modèles d'étoiles en rotation rapide . . . . .	19
1.2.3 Recherche de régularités dans les $\delta$ Scuti . . . . .	21
<b>2 Outils du chaos quantique</b>	<b>23</b>
2.1 Intégrabilité et chaos dans les systèmes Hamiltoniens . . . . .	24
2.1.1 Rappels sur les systèmes Hamiltoniens . . . . .	24
2.1.2 Systèmes intégrables . . . . .	27
2.1.3 Systèmes chaotiques . . . . .	29
2.1.4 Systèmes mixtes . . . . .	31
2.2 Physique semiclassique . . . . .	33
2.2.1 Systèmes Hamiltoniens et mécanique quantique . . . . .	33
2.2.2 Limite semiclassique . . . . .	36
2.2.3 Intégrabilité et chaos en physique quantique . . . . .	41
2.2.4 Propriétés statistiques des spectres quantiques . . . . .	47
2.2.5 Universalité dans les systèmes chaotiques . . . . .	50
<b>3 Modes de pression dans les étoiles en rotation rapide</b>	<b>53</b>
3.1 Théorie linéaire des oscillations . . . . .	53
3.2 Oscillations dans un modèle d'étoile polytropique . . . . .	56
3.2.1 Le modèle polytropique . . . . .	56
3.2.2 Calcul des pulsations . . . . .	57
3.3 Méthodes asymptotiques . . . . .	59
3.3.1 Limite des rayons . . . . .	60
3.3.2 Structures dans l'espace des phases . . . . .	64
3.3.3 Associer les modes aux rayons . . . . .	66
3.3.4 Spectres d'oscillation réguliers et chaotiques . . . . .	68
<b>4 Étude semiclassique des modes de pression chaotiques</b>	<b>73</b>
4.1 Calcul et identification des modes chaotiques à hautes fréquences . . . .	74
4.1.1 Constitution d'une base de données . . . . .	74

4.1.2	Présentation des données . . . . .	82
4.2	Analyse semiclassique . . . . .	85
4.2.1	Méthodes du chaos quantique pour les oscillations acoustiques . . . . .	87
4.2.2	Effet du profil inhomogène de la vitesse du son sur les orbites périodiques . . . . .	90
4.2.3	Impact sur la statistique spectrale . . . . .	92
4.3	Pics additionnels et barrières partielles . . . . .	97
4.4	Le spectre à basses fréquences . . . . .	99
<b>Annexes</b>		<b>105</b>
A.1	Oscillations dans l'approximation adiabatique . . . . .	105
A.2	Approximation des rayons et formule de Tassoul . . . . .	106
B.1	Barrières partielles dans les zones ergodiques de l'espace des phases . . . . .	109
B.2	Séries de modes chaotiques . . . . .	111
<b>Publications</b>		<b>113</b>
	Publication I . . . . .	113
	Publication II . . . . .	121
<b>Bibliography</b>		<b>140</b>

# Introduction

Peut-on, à l'oreille, percevoir la forme d'un tambour<sup>1</sup> ? Tel est le titre d'un célèbre cours du mathématicien Mark Kac ([Kac, 1966](#)). Si la question peut surprendre, elle est rapidement devenue cruciale dans la physique moderne. Par ‘tambour’, il faut comprendre une membrane tendue qui vibre sous l’effet de la percussion excepté sur son bord. Ce dernier, fermement attaché, n’étant pas en mesure de vibrer. Dans cette situation, les excitations harmoniques de la membrane forment des ondes stationnaires, ou modes propres, qui ne peuvent pas osciller à n’importe quelles fréquences. En effet, les fréquences autorisées sont déterminées par les propriétés du milieu et les conditions aux bord. Plus généralement, le son d’un instrument est produit par une cavité vibrante<sup>2</sup> dans laquelle se déploient des ondes stationnaires. La question, formulée autrement, est donc de savoir si la seule connaissance des modes propres d’oscillation permet de remonter aux propriétés de la cavité résonnante, en particulier la forme de sa frontière<sup>3</sup>. On trouve dans la nature de nombreux systèmes qui s’apparentent à des cavités vibrantes. Aux petites échelles, on peut donner l’exemple des orbitales atomiques, qui sont à l’origine du spectre d’émission discret des atomes. Aux très grandes échelles, on peut citer les étoiles pulsantes. Dans cette thèse, c’est bien aux oscillations des étoiles que nous nous intéresserons. Toutefois, grâce à une analogie mathématiquement rigoureuse, nous utiliserons des méthodes développées dans le contexte de la mécanique quantique.

Les oscillations d’étoiles sont classées en modes de gravité, ou *modes g* et en modes de pression ou *modes p*. Dans une étoile en équilibre thermique, la force d’Archimède et la pression agissent comme des forces de rappel. Ainsi, toute perturbation du milieu stellaire résulte en une oscillation autour de l’état d’équilibre. Les oscillations se traduisent par une modulation périodique du rayonnement émis par l’étoile. Il est alors possible de remonter aux fréquences des oscillations excitées dans les étoiles par des techniques de photométrie ou de spectroscopie. L’étude des oscillations stellaires est *l’astérosismologie*. L’objectif de ce domaine est de révéler la structure interne des étoiles, de la même manière que l’analyse des ondes sismiques permet de sonder la structure profonde de la Terre. L’astérosismologie est essentielle à la physique stellaire, car elle constitue le seul moyen d’obtenir des informations sur l’intérieur des étoiles (à l’exception du flux de neutrinos en provenance du Soleil, qui nous renseigne sur la température au cœur). À la surface du Soleil, les mouvements de convection turbulents engendrent des oscillations de faible amplitude. Les méthodes de l’astérosismologie sont donc applicables au Soleil. Le modèle sismique du Soleil est d’une telle précision qu’il

---

1. En anglais, *Can one hear the shape of a drum ?*

2. Pour les instruments de musique, les oscillations sont le plus souvent forcées. Dans le cas du violon ou du piano, c’est bien la corde qui fixe les fréquences autorisées

3. On sait maintenant qu’il existe des paires de cavités isospectrales. Pour une revue du sujet, voir ([Giraud and Thas, 2010](#)), ce qui prouve que la forme de la cavité n’est pas, en général, déterminée par son spectre. Pour des formes simples, comme les rectangles, c’est en revanche le cas.

a permis de prédire avec succès le flux de neutrinos émis par le Soleil (Turck-Chièze et al., 2004).

L’astérosismologie spatiale, menée par les missions Corot (Baglin et al., 2006), Kepler (Borucki et al., 2010; Koch et al., 2010) et très récemment Tess (Ricker et al., 2015), a été une véritable révolution. Désormais, les spectres en fréquence des étoiles sont disponibles à très haute résolution. En particulier, pour les pulsateurs de type solaire, c’est-à-dire ceux pour lesquels les oscillations sont engendrés dans une enveloppe convective, ces nouvelles données ont apporté des contraintes fortes sur l’intérieur de ces étoiles. Cet essor de l’astérosismologie spatiale va de paire avec la recherche d’exoplanètes. En effet, ce sont également les données photométriques qui permettent de détecter le transit d’exoplanètes. De plus, il est nécessaire de bien connaître les paramètres fondamentaux d’une étoile pour ensuite caractériser les exoplanètes qui gravitent autour. L’astérosismologie aide ainsi à la caractérisation des exoplanètes.

Citons quelques avancées récentes dans notre compréhension des intérieurs stellaires permises par la sismologie spatiale. Récemment, la stratification chimique a été mesurée dans une naine blanche (Giammichele et al., 2018) de manière directe (sans se reposer sur un modèle d’étoile de référence). Ce type de mesure confronte les modèles d’évolution stellaire aux observations, ce qui est particulièrement important aux stades avancés de l’évolution. La sismologie apporte aussi des informations cruciales sur la rotation interne des étoiles. On a ainsi pu évaluer la rotation interne des étoiles. D’abord en 1996 dans le Soleil (Thompson et al., 1996), puis en 2012 dans les sous-géantes (Deheuvels et al., 2012) et géantes (Mosser et al., 2012). Ces mesures ont largement modifié notre compréhension du transport de moment angulaire dans les étoiles.

Malgré ces succès, certains types d’étoiles résistent à l’analyse sismique. C’est le cas des étoiles massives ou de masse intermédiaire ( $M > 1.5 M_{\odot}$ , où  $M_{\odot}$  est la masse du Soleil) de la séquence principale<sup>4</sup>. Ces étoiles sont généralement en rotation rapide sur elles-mêmes (Royer, 2009), ce qui complique l’analyse des spectres pour plusieurs raisons. D’abord, la rotation a pour effet de dilater les étoiles au niveau de l’équateur sous l’action de la force centrifuge. La modélisation d’étoiles en rotation rapide nécessite donc de concevoir un code 2D, capable de prendre en compte les effets dus à la déformation de l’étoile. Dans les étoiles à symétrie sphérique, la structure du spectre en fréquence des modes p est donnée asymptotiquement (pour  $n \gg \ell$ , où  $n$  est l’ordre radial et  $\ell$  est le degré) par une formule simple, dite formule de Tassoul (Tassoul, 1980). La connaissance *a priori* de la structure asymptotique est un atout essentiel pour pouvoir ensuite identifier les modes, c’est-à-dire assigner correctement un couple  $(n, \ell)$  à chaque fréquence observée. Or la rotation modifie substantiellement la structure du spectre, qui n’obéit plus à la formule de Tassoul.

Pour comprendre les effets de la rotation rapide sur les oscillations stellaires acoustiques, un pas crucial a été le développement de codes capables de calculer les oscillations de modèles d’étoiles déformées par la force centrifuge (Lignières et al., 2006; Reese, 2006; Reese et al., 2009; Ouazzani et al., 2012). Lignières et Georgeot (Lignières and Georgeot, 2008, 2009) ont ensuite développé une théorie asymptotique basée sur la dynamique des rayons qu’ils ont confrontée aux calculs numériques des modes p. Dans la limite des petites oscillations, où les ondes sonores se comportent comme des rayons, ils ont montré que la dynamique des rayons se ramène à un système Hamiltonien. À

---

4. La séquence principale regroupe des étoiles faiblement évoluées qui produisent de l’énergie par la fusion de l’hydrogène en hélium.

rotation nulle, la dynamique est entièrement intégrable. Mais lorsque l'étoile est en rotation, la dynamique devient mixte avec à la fois des zones intégrables et des zones chaotiques. Le spectre est alors une superposition de sous-spectres, correspondant chacun à une zone de l'espace des phases. Par la suite, [Pasek et al. \(2011, 2012\)](#) ont trouvé une formule semi-analytique, du même type que la formule de Tassoul, reproduisant la structure asymptotique des *modes d'îlot* associés aux zones dynamiquement stables de l'espace des phases.

Des progrès ont également été réalisés dans la communauté des observateurs. En ciblant les étoiles de type  $\delta$  Scuti, qui sont des étoiles de la séquence principale en rotation rapide et oscillant dans les modes p, un espacement régulier en fréquence similaire à la *grande séparation* bien connue dans les pulsateurs de type solaire, a été détecté dans les spectres ([García Hernández et al., 2015](#)). Ce résultat important est en accord avec la présence de modes d'îlot dans ces étoiles.

À haute rotation, on s'attend d'après les résultats de Lignières et Georgeot à voir non seulement des modes d'îlot, mais aussi des modes dits *chaotiques*. Le but de ma thèse a été d'étudier les modes chaotiques et en particulier leur structure asymptotique. Qualitativement, le *chaos ondulatoire* est un phénomène simple. Il peut être mis en évidence par la célèbre expérience des plaques vibrantes de Chladni, qui fait apparaître la structure nodale des modes de vibration (voir e.g. [Tuan et al. \(2015\)](#)). Sur une plaque circulaire, chaque mode est défini par son nombre de nœuds dans les directions radiale et angulaire. En revanche pour certaines formes de plaque, par exemple avec un ou plusieurs points anguleux, les modes ont une structure nodale complexe : ce sont les modes chaotiques. Le terme de chaos ondulatoire provient de l'analyse asymptotique. Dans une plaque de densité constante, les rayons se propagent en ligne droite avec un rebond spéculaire à la surface. C'est alors la forme de la surface qui détermine si la dynamique des rayons est intégrable ou chaotique. Dans le cas stellaire, c'est la déformation de la surface liée à la rotation qui est responsable de l'apparition du chaos.

Les modes chaotiques ont été étudiés en détail dans le cadre de la physique quantique. Un résultat important concerne la distribution de leurs fréquences propres, qui est donnée par la théorie des matrices aléatoires (voir section [2.2.4](#)) et ne montre pas de régularités. Dans cette thèse, nous montrons que les modes de pression chaotiques dans les étoiles en rotation rapide présentent une régularité analogue à la grande séparation. Pour expliquer l'origine de cette régularité, qui est une surprise du point de vue du chaos ondulatoire, nous avons écrit une expression de l'autocorrélation qui fait intervenir les temps de parcours des rayons acoustiques. Cette expression a été obtenue en appliquant des méthodes bien connues dans le domaine du chaos quantique et décrites dans le chapitre 2 (formule des traces, approximation diagonale). Cette analyse montre que c'est la forte inhomogénéité de la vitesse du son dans le plan méridien de l'étoile qui cause la régularité. Nous montrons également que la grande séparation des modes chaotiques est très proche de celle des modes d'îlot, ce qui devrait renforcer la détectabilité d'une grande séparation dans les étoiles.

## Organisation du manuscrit

Le manuscrit est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre introduit le contexte astrophysique dans lequel se place la thèse, à savoir la sismologie des étoiles

en rotation rapide présentant des oscillations dans les modes  $p$ . Nous rappellerons les travaux théoriques antérieurs qui ont permis de mieux caractériser les oscillations dans ces étoiles. Les spectres d'oscillation observés dans les  $\delta$  Scuti seront également mis en avant. Malgré les difficultés pour analyser ces spectres, l'existence d'une grande séparation prédite par la théorie semble se confirmer dans ces étoiles.

Le second chapitre décrit la physique des systèmes dynamiques Hamiltoniens à caractère mixte. Nous décrirons ces systèmes dans la limite classique (où les solutions sont des trajectoires) et dans la limite semiclassique (où les solutions sont des ondes). Nous insisterons particulièrement sur les méthodes du chaos quantique, qui permettent la quantification des trajectoires chaotiques.

Dans le troisième chapitre, nous rappelons les résultats de [Lignières and Georgot \(2008, 2009\)](#). Ces résultats montrent que les oscillations acoustiques sont décrites asymptotiquement par un système Hamiltonien à caractère mixte. Les outils présentés dans le chapitre 2 sont donc indispensables non seulement pour comprendre la nouvelle phénoménologie (classification des modes) qui apparaît à haute rotation mais aussi pour relier de manière quantitative les propriétés du spectre et celles de l'intérieur stellaire ([Pasek et al., 2011](#)). Ce chapitre sera également l'occasion de présenter les méthodes numériques utilisées dans cette thèse pour calculer d'une part les oscillations d'un modèle polytropique d'étoile déformée par la force centrifuge et d'autre part les trajectoires des rayons dans ce même modèle.

Le dernier chapitre détaille les résultats principaux obtenus au cours de la thèse sur les propriétés des modes chaotiques, en nous basant sur les articles joints à la fin de ce manuscrit.

# Chapitre 1

## Sismologie des étoiles en rotation rapide

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Caractéristiques des étoiles pulsantes</b>	<b>6</b>
1.1.1	Techniques d'observation	6
1.1.2	Pulsateurs classiques et de type solaire	7
1.1.3	Modes p et g dans une étoile sphérique.	11
<b>1.2</b>	<b>Modes de pression dans les pulsateurs classiques en rotation rapide</b>	<b>15</b>
1.2.1	Étoiles en rotation rapide	15
1.2.2	Régularités des modes p dans les modèles d'étoiles en rotation rapide	19
1.2.3	Recherche de régularités dans les $\delta$ Scuti	21

L'étude des oscillations stellaires, ou astérosismologie, est l'unique moyen de sonder l'intérieur des étoiles. Elle apporte aussi des informations sur les paramètres fondamentaux des étoiles comme leur masse, leur rayon ou leur âge. Les résultats apportés par cette discipline sont évidemment d'importance en physique stellaire, mais ils servent aussi à faire progresser d'autres champs de l'astrophysique comme l'étude des galaxies ou des exoplanètes (par exemple, le rayon d'une étoile sert de référence pour estimer la taille des exoplanètes du système). Essentiellement, une étoile se modélise comme un fluide autogravitant. Ce sont les oscillations mécaniques de ce fluide qui donnent lieu à une variation temporelle du flux radiatif et donc au 'clignotement' des étoiles. Pour réaliser l'étude sismique détaillée d'une étoile, il faut déjà être capable de procéder à *l'identification des modes d'oscillation*, i.e. d'associer correctement à une fréquence observée un mode d'oscillation calculé théoriquement. Ensuite, on recherche le modèle d'étoile dont les fréquences d'oscillation reproduisent au mieux les fréquences observées. Pour le Soleil, cela a permis d'obtenir avec une très grande précision certains paramètres physiques internes (la vitesse du son est par exemple connue à différentes profondeurs à quelques pourcents près ([Christensen-Dalsgaard, 2003](#))). Si de nombreuses étoiles sont bien contraintes par l'astérosismologie, ce n'est pas le cas des étoiles massives ou de masse intermédiaire, qui tournent rapidement sur elles-mêmes ([Royer, 2009](#)). En effet, pour la plupart d'entre elles, l'identification des modes est un problème non-résolu.

Cette difficulté est due à la fois aux effets insuffisamment compris de la rotation rapide sur les oscillations ainsi qu’au mécanisme non-linéaire qui détermine l’amplitude des modes.

Dans cette thèse, nous poursuivons les travaux de Lignières, Georgeot et Pasek (voir e.g. [Lignières and Georgeot \(2009\)](#); [Pasek et al. \(2012\)](#)) ayant pour objectif d’améliorer l’identification des modes de pression dans les étoiles en rotation rapide via des méthodes théoriques asymptotiques. Ce premier chapitre est organisé comme suit. Nous décrirons d’abord brièvement les techniques observationnelles permettant la détection des oscillations et les différents types de comportement pulsationnel en établissant la distinction entre pulsateurs classiques et pulsateurs de type solaire. Même si les étoiles en rotation rapide qui nous intéressent dans le cadre de cette thèse sont des pulsateurs classiques, nous nous attarderons sur les pulsateurs de type solaire car ils constituent un bon exemple de l’utilité des méthodes asymptotiques pour l’identification des fréquences observées. Nous décrirons ensuite les propriétés principales des étoiles  $\delta$  Scuti, une classe de pulsateurs classiques et en rotation rapide ainsi que les avancées récentes pour modéliser et détecter des régularités dans le spectre des fréquences acoustiques de ces étoiles.

## 1.1 Caractéristiques des étoiles pulsantes

### 1.1.1 Techniques d’observation

La méthode la plus utilisée pour mesurer les oscillations stellaires est *la photométrie*. Cette méthode consiste à mesurer avec précision les variations de *la courbe de luminosité*, qui correspond à l’évolution du flux de photons perçu en provenance d’une étoile au cours du temps. Les données brutes sont des séries temporelles dont on tire les fréquences d’oscillation par l’analyse de Fourier. Les règles de base de l’analyse de Fourier appliquées aux fonctions discrètes impliquent que l’étendue du domaine de fréquences accessible dépend de la cadence d’échantillonnage. Aussi, une bonne précision sur la fréquence nécessite une grande durée d’observation. À ce titre, la photométrie spatiale est une révolution. En plus d’évacuer les difficultés liées aux perturbations atmosphériques, les télescopes spatiaux ne sont pas limités par le cycle jour-nuit et offrent un gain important sur le temps d’observation, qui peut par exemple atteindre 150 jours pour une même source avec le satellite CoRoT ([Baglin et al., 2008](#)). Pour faire de nouvelles découvertes, il est nécessaire de gagner en précision sur les fréquences mais aussi en sensibilité pour détecter les variations de luminosité de faibles amplitudes. Ces dernières années le domaine a bénéficié du lancement de plusieurs missions spatiales. Ainsi CoRoT a été lancé en 2006, puis Kepler en 2009 ([Borucki et al., 2010](#); [Koch et al., 2010](#)) prolongé en K2 en 2013 ([Howell et al., 2014](#)), Tess depuis 2017 ([Ricker et al., 2015](#)) et à l’avenir Plato ([Rauer et al., 2014](#)).

Les étoiles pulsantes observées sont souvent multi-périodiques, c’est-à-dire que plusieurs modes de pulsation sont excités simultanément. À l’exception du Soleil qui est suffisamment proche pour que l’on résolve spatialement sa surface, le flux de rayonnement que l’on mesure pour les autres étoiles est moyenné sur l’ensemble de la surface visible de l’objet. L’effet d’annulation entre les parties plus brillantes et plus sombres sur la surface intégrée peut être important, en particulier quand le nombre de noeuds



est élevé. On parle de la visibilité des modes qui va dépendre de nombreux paramètres, en particulier de la géométrie des modes d'oscillation, de l'inclinaison de l'étoile par rapport à la ligne de visée, etc.

Pour les étoiles les plus brillantes, il est possible d'observer par spectroscopie les oscillations du champ de vitesses des couches photosphériques (Aerts et al., 2010). Les spectrographes de haute résolution analysent les raies d'absorptions qui correspondent aux transitions électroniques des éléments chimiques présents dans les atmosphères stellaires. Les vitesses de ces éléments, et donc de la surface stellaire, sont obtenues en analysant la déformation des raies d'absorption causées par l'effet Doppler. La spectroscopie apporte beaucoup d'autres informations précieuses pour caractériser une étoile. Elle permet bien sûr d'assigner un type spectral à l'étoile, mais aussi de déterminer si une source lumineuse correspond à un système binaire où deux étoiles cohabitent, ou encore de poser une limite inférieure sur la vitesse de rotation d'un astre.

### 1.1.2 Pulsateurs classiques et de type solaire

Une étoile peut être caractérisée par sa position dans le diagramme de Hertzsprung-Russel (diagramme HR) qui met en regard la luminosité de l'étoile et sa température effective. Cette position donne une indication de sa masse et de son stade évolutif. La zone la plus peuplée du diagramme HR est *la séquence principale*, qui correspond à la phase où les étoiles produisent de l'énergie par la fusion de l'hydrogène en hélium et qui occupe 90% de leur vie (Kippenhahn and Weigert, 1990). Des étoiles pulsantes sont présentes dans la plupart des régions du diagramme HR c'est-à-dire à des masses et stades évolutifs variés. C'est ce que montre la Fig. 1.1 qui présente les différents groupes d'étoiles pulsantes dans le diagramme HR.

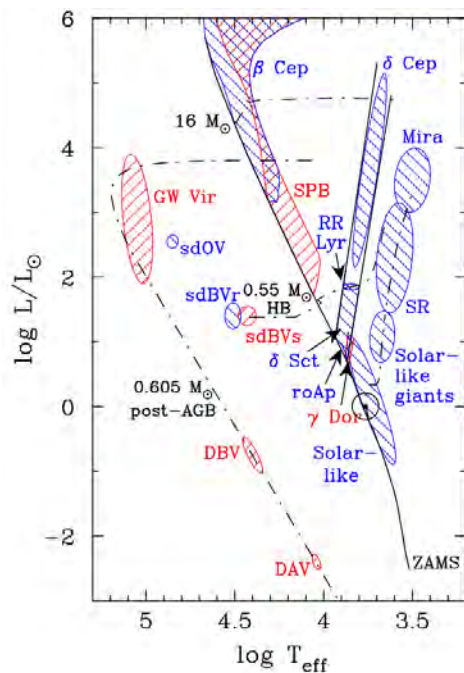


FIGURE 1.1 – Diagramme de Hertzsprung-Russel indiquant les différentes classes d'étoiles pulsantes. Les stries diagonales de couleur bleue (resp. rouge) signifient que les oscillations sont dominées par les modes de pression (resp. de gravité). La bande d'instabilité des Céphéides est représentée par deux segments en trait plein approximativement parallèles. La séquence principale d'âge zéro (ZAMS pour 'Zero Age Main Sequence' en anglais) est tracée en trait plein. Figure tirée de Handler (2013).

Comme précisé dans la légende de la Fig. 1.1 on détecte principalement deux types d'oscillations à la surface des étoiles. D'une part les modes de pression (modes p) pour lesquels la pression est la force de rappel, et d'autre part les modes de gravité (modes

g), où la force d'Archimède est la force de rappel. Les étoiles peuvent osciller dans les modes p, dans les modes g ou bien dans les deux à la fois. On classe les étoiles pulsantes en deux grands groupes, les pulsateurs classiques et les pulsateurs de type solaire. Les premières oscillations connues furent détectées dans les pulsateurs classiques, tandis que les plus faibles amplitudes des pulsateurs de type solaire furent détectées plus tard, d'abord sur le Soleil, puis sur les autres étoiles présentant une zone convective sous leur surface, pour l'essentiel depuis l'avènement de la sismologie spatiale.

## Pulsateurs classiques

Les premières étoiles variables connues étaient les céphéides. Avec les RR Lyrae, elles présentent de fortes oscillations purement radiales. Ces étoiles sont utilisées pour mesurer les distances cosmologiques en exploitant la relation qui relie leur période de pulsation et leur luminosité intrinsèque. Cette particularité leur vaut le surnom de *chandelles standards*. Il y a beaucoup d'autres pulsateurs classiques, qui ont en général des oscillations non radiales. La table 1.1 répertorie les pulsateurs classiques de la séquence principale et les caractéristiques de leurs oscillations.

Classe	Modes dominants	Périodes	Amplitude (luminosité)	Amplitude (vitesse)
$\gamma$ Doradus	modes g	8h à 5 jours	$< 50$ mmag	$< 5$ km.s <sup>-1</sup>
$\delta$ Scuti	modes p	15 min à 8h	$< 0.3$ mmag	$< 10$ km.s <sup>-1</sup>
roAp	modes p	5 min à 22 min	$< 10$ mmag	$< 10$ km.s <sup>-1</sup>
SPB	modes g	12h à 5 jours	$< 50$ mmag	$< 15$ km.s <sup>-1</sup>
$\beta$ Cephei	modes p	1h à 12h	$< 0.1$ mag	$< 20$ km.s <sup>-1</sup>
	et modes g	quelques jours	$< 0.01$ mag	$< 10$ km.s <sup>-1</sup>

TABLE 1.1 – Caractéristiques des oscillations dans les pulsateurs classiques. On se restreint aux étoiles de la séquence principale (voir Fig. 1.1).

Tableau adapté de [Aerts et al. \(2010\)](#).

D'un point de vue théorique, les oscillations des pulsateurs classiques résultent de la croissance d'une instabilité dans le fluide stellaire. Un des principaux mécanismes d'excitation est le mécanisme  $\kappa$ , la lettre grecque  $\kappa$  désignant l'opacité du milieu stellaire (voir e.g. [Kippenhahn and Weigert \(1990\)](#) pour une description des phénomènes de physique microscopique qui interviennent dans le calcul de l'opacité). Le mécanisme  $\kappa$  agit au niveau des couches d'ionisation des éléments abondants, par exemple la couche d'ionisation de He II dans les  $\delta$  Scuti ([Bowman and Kurtz, 2018](#)) ou celle du fer dans les  $\beta$  Cep ([Moskalik and Dziembowski, 1992](#)). Dans les couches partiellement ionisées, l'opacité augmente fortement quand la température s'élève. Sous l'effet d'une petite perturbation, l'étoile subit une succession de compressions et de dilatations de faible amplitude. Lors d'une phase de compression, la croissance de la température se traduit par une plus grande opacité et ainsi une plus grande énergie emmagasinée. La dilatation qui suit est amplifiée par ce phénomène. Puis lors de la phase de dilatation l'opacité baisse et la couche résiste mieux à la pression radiative, accentuant la compression. D'autres mécanismes d'excitation ont été proposés pour d'autres classes de pulsateurs. Par exemple, l'enveloppe convective peut entretenir une excitation si l'échelle de

temps caractéristique de la convection est du même ordre que la période de pulsation. C'est le *blocage convectif* proposé par Pesnell (1987). Il a été montré que le blocage convectif est vraisemblablement responsable de l'excitation des modes g dans les étoiles de type  $\gamma$  Doradus (Guzik et al., 2000; Warner et al., 2003; Dupret et al., 2004, 2005). Notons enfin que les oscillations peuvent avoir une origine extrinsèque, comme dans les systèmes binaires où la proximité d'une seconde étoile induit des oscillations par effet de marée.

Cette thèse a pour objectif d'apporter des outils pour l'identification des modes p dans les étoiles en rotation rapide. Nous sommes donc particulièrement intéressés par les oscillations des  $\delta$  Scuti, qui sont des pulsateurs en rotation rapide oscillant dans les modes p. Les spectres des pulsateurs en rotation rapide sont complexes et leur interprétation détaillée constitue un défi pour l'astérosismologie. Les difficultés liées à la rotation rapide et les pistes de résolution de ces difficultés seront présentées dans la section 1.2.1. Dans la suite, nous considérons le cas des pulsateurs de type solaire car ils constituent un bon exemple de l'utilité des méthodes asymptotiques pour l'identification des fréquences observées.

## Pulsateurs de type solaire

Dans les pulsateurs de type solaire, les modes sont excités de manière stochastique par les mouvements turbulents de l'enveloppe convective. Cela concerne les étoiles de faible masse ( $M < 1.5M_{\odot}$ ) mais aussi les géantes rouges (Dziembowski et al., 2001). Les oscillations d'origine stochastique induisent des variations de luminosité de faible amplitude de l'ordre de quelques parties par millions (quelques dizaines de centimètres par seconde pour les vitesses Doppler) pour les étoiles de la séquence principale. Malgré la faible amplitude des modes et le caractère stochastique de l'excitation, les fréquences peuvent être déterminées avec une précision suffisante dans de nombreux cas.

Avant de décrire la méthode d'identification de ces fréquences, commençons par rappeler que le *spectre d'oscillation* des étoiles est *quantifié*, i.e. le nombre de fréquences dans un intervalle est fini (les fréquences pouvant être dégénérées). La théorie des modes d'oscillations d'une étoile sans rotation, que nous présenterons dans la section 1.1.3, permet d'attribuer un triplet de nombres entiers à chaque mode. En effet, la Fig. 1.4 montre la distribution spatiale des modes en surface et la Fig. 1.6 le comportement radial. À partir de ces deux figures, on voit que *l'ordre radial*  $n$ , le *degré*  $\ell$  et *l'ordre azimuthal*  $m$  correspondent aux nœuds de vibration des modes. L'identification des modes revient donc à assigner des nombres quantiques aux fréquences détectées.

La figure 1.2 présente une portion du spectre d'oscillation du Soleil. On remarque que le spectre d'oscillation est très régulier. Il existe ainsi une série de fréquences séparées par un écart régulier  $\Delta_{\nu}$ , que l'on appelle *la grande séparation*. Un second écart apparaît systématiquement dans le spectre. Il s'agit de la *petite séparation*  $\delta_{\nu}$ . Cette organisation du spectre d'oscillation est une propriété générique des pulsateurs de type solaire, qui apparaît d'autant plus nettement pour les hautes fréquences.

Ces propriétés sont bien comprises dans le cadre de la théorie des oscillations stellaires pour une étoile à faible rotation et sont décrites par la formule de Tassoul (Vandakurov, 1967; Tassoul, 1980)

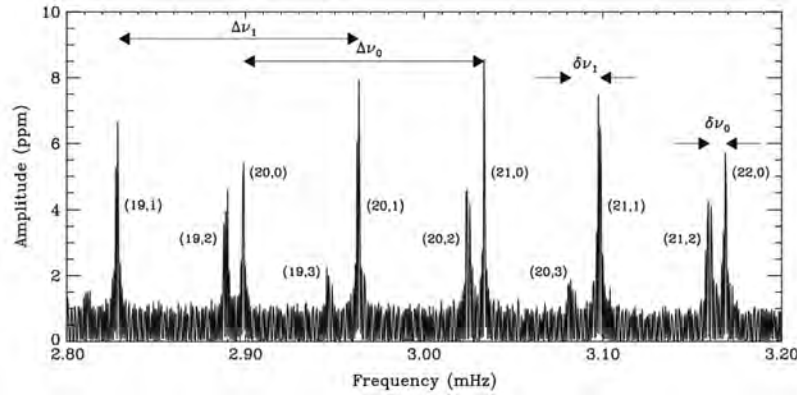


FIGURE 1.2 – Spectre en fréquence des variations de vitesse radiales observées avec le satellite SOHO (Domingo et al., 1995). Les nombres quantiques sont associés aux différents pics d’amplitude sont présentés entre parenthèses, sous la forme  $(n, \ell)$ . La grande séparation  $\Delta_\nu \equiv \nu_{n+1, \ell, m} - \nu_{n, \ell, m}$  et la petite séparation  $\delta_\nu \equiv \nu_{n, \ell} - \nu_{n-1, \ell+2}$  sont représentées par les doubles flèches. Figure tirée de Aerts et al. (2010)

$$\omega_{n, \ell} \approx \left( n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha \right) \Delta\omega, \quad (1.1)$$

avec

$$\Delta\omega = 2\pi \left( 2 \int_0^R \frac{dr}{c_s} \right)^{-1}, \quad (1.2)$$

où  $\omega = 2\pi\nu$  est la pulsation<sup>1</sup>,  $\alpha$  est une constante,  $R$  est le rayon de l’étoile et  $c_s(r)$  la vitesse du son dans l’étoile. L’Éq. 1.1 est une formule asymptotique dérivée dans la limite des modes de bas degrés  $\ell \ll n$ <sup>2</sup>. La formule asymptotique de Tassoul est précieuse pour deux raisons. Elle permet d’abord de connaître *a priori* la structure du spectre d’oscillation, ce qui est très utile pour pouvoir ensuite identifier les modes. De plus, elle relie la grande séparation aux propriétés physiques de l’intérieur stellaire via la quantité  $c_s(r)$ .

Cette organisation est mise clairement en évidence en représentant les fréquences sur un diagramme échelle, dont on donne un exemple pour le cas solaire sur la Fig. 1.3. On commence par choisir un écart en fréquence  $\Delta$ , puis on place chaque fréquence dans un espace à deux paramètres  $(\omega, \omega \bmod \Delta)$ . En choisissant  $\Delta = \Delta\omega$ , on observe sur la Fig. 1.3 que les fréquences se répartissent en séries approximativement verticales. Le diagramme échelle met ainsi en évidence la structure asymptotique dans les spectres observés et permet, avec l’aide de la formule de Tassoul, une identification des fréquences de même degré et d’ordres radiaux croissants. Cette analyse des données permet en outre d’obtenir une valeur de la grande séparation.

Dans le Soleil, la grande séparation est connue avec une grande précision puisque l’on détecte les modes d’ordre radial élevé. Elle vaut  $\Delta_{\nu_\odot} = 134.8 \mu\text{Hz}$  (Kjeldsen et al.,

1. Par la suite, nous utiliserons sans distinction les termes ‘pulsation’ et ‘fréquence’ en référence à la quantité  $\omega$ .

2. Pour plus de détails sur les méthodes asymptotiques et la formule de Tassoul, voir annexe A.1.

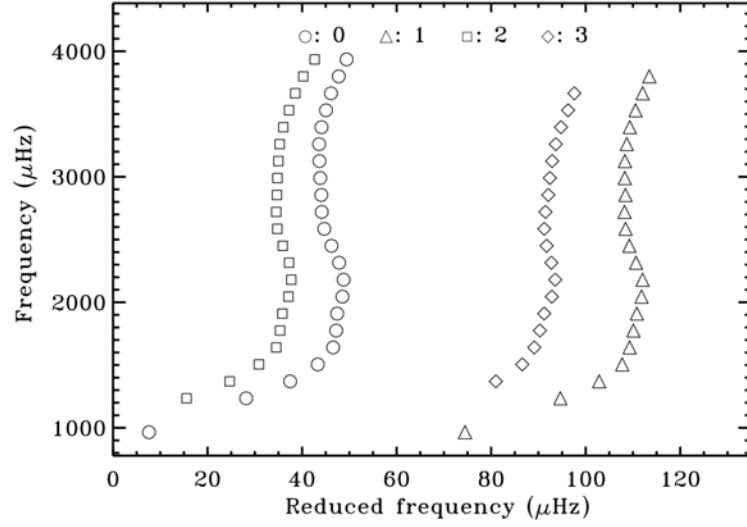


FIGURE 1.3 – Diagramme échelle pour des fréquences observées dans le Soleil à partir de  $\nu_0 = 830\mu H_z$  pour  $\Delta_\nu = 135\mu H_z$ . Les ronds, les triangles, les carrés et les losanges (‘diamonds’) correspondent respectivement au degrés  $\ell = 0, 1, 2$  et  $3$ . En dessous de  $1500\mu H_z$  les fréquences ne sont pas alignées, montrant ainsi que les régularités apparaissent dans le spectre vers les hautes fréquences.

2008). La mesure de la grande séparation donne accès à la densité moyenne de l’étoile  $\bar{\rho}$  (donc potentiellement à la masse et au rayon via  $M = (4\pi/3)R^3\bar{\rho}$  où  $R$  est le rayon de l’étoile) car il existe une loi d’échelle reliant ces deux quantités (Christensen-Dalsgaard, 2003)

$$\Delta_\nu \propto \bar{\rho}^{1/2}. \quad (1.3)$$

Le second écart régulier, la *petite séparation*  $\delta_\nu$ , dépend des conditions physiques au cœur et permet d’évaluer l’âge des étoiles (voir Annexe A.1).

### 1.1.3 Modes p et g dans une étoile sphérique.

Dans cette section, nous rappelons, principalement pour les lecteurs non spécialistes en sismologie stellaire, les propriétés élémentaires des modes p et g dans une étoile à symétrie sphérique (Unno, 1989). Les modes propres d’oscillation s’écrivent

$$p'(r, \theta, \phi, t) = p'(r)Y_\ell^m(\theta, \phi)e^{i\omega t} \quad (1.4)$$

où la partie angulaire est décrite par les harmoniques sphériques  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ . Les harmoniques sphériques se décomposent à leur tour en une partie latitudinale et une partie azimuthale

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) \propto P_\ell^{|m|}(\cos \theta)e^{im\phi} \quad (1.5)$$

où  $P_\ell^{|m|}(\cos \theta)$  est un polynôme de Legendre. Ainsi, les modes propres sont complètement séparables en un produit de fonctions de la forme  $f(r)g(\theta)h(\phi)$ . La constante de normalisation dans l’Éq. 1.5 est fixée par la condition d’orthonormalisation suivante

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_\ell^m(\theta, \phi) \{Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi)\}^* \sin(\theta) d\theta d\phi = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'} \quad (1.6)$$

ce qui donne

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_\ell^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (1.7)$$

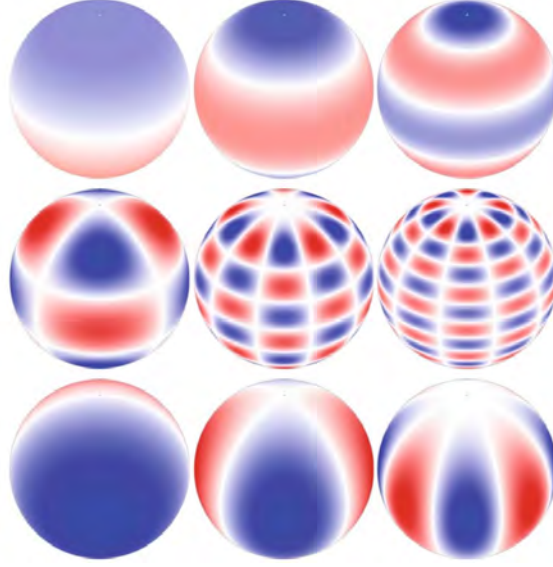


FIGURE 1.4 – Représentation des harmoniques sphériques. Rang du haut : modes axisymétriques avec  $\ell = 1, 2, 4$ . Rang du milieu : modes tesseraux  $(\ell, m) = (4, 2), (10, 5), (15, 5)$ . Rang du bas : modes sectoraux  $\ell = 0, m = 1, 2, 4$ . Figure tirée de [Aerts et al. \(2010\)](#).

Nous présenterons dans le chapitre 3 les équations décrivant les oscillations stellaires. En supposant que les fréquences d'oscillation sont élevées, il est justifié d'appliquer l'approximation de Cowling ([Cowling, 1941](#)) qui consiste à négliger les perturbations du potentiel gravitationnel induites par les perturbations de la densité. Sous cette approximation, les équations des oscillations se réduisent à une équation différentielle du second ordre ([Christensen-Dalsgaard, 2003](#)) :

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} = -K(r) \xi_r, \quad (1.8)$$

où  $\xi_r$  est le déplacement radial, et où le vecteur d'onde  $K(r)$  est donné par la relation de dispersion suivante

$$K(r) = \frac{\omega^2}{c_s^2} \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \left( \frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right). \quad (1.9)$$

L'expression de  $K(r)$  fait intervenir deux fréquences caractéristiques  $S_l$  et  $N$ . La *fréquence de Lamb*  $S_l$  est définie par

$$S_l = \frac{l(l+1)c_s^2}{r^2}, \quad (1.10)$$

et correspond à une fréquence acoustique caractéristique. La *fréquence de Brunt-Väisälä*  $N$  qui, correspond à la fréquence d'oscillation d'une particule de fluide déplacée verticalement dans un milieu dynamiquement stable, est définie par

$$N^2 = g \left( \frac{1}{c_s^2 \rho} \frac{dp_0}{dr} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right). \quad (1.11)$$

Les fréquences caractéristiques  $S_l$  et  $N$  sont des fonctions du rayon et sont calculées à partir d'un modèle d'étoile à l'équilibre. La Fig. 1.5 compare ces deux fréquences pour un modèle du soleil.

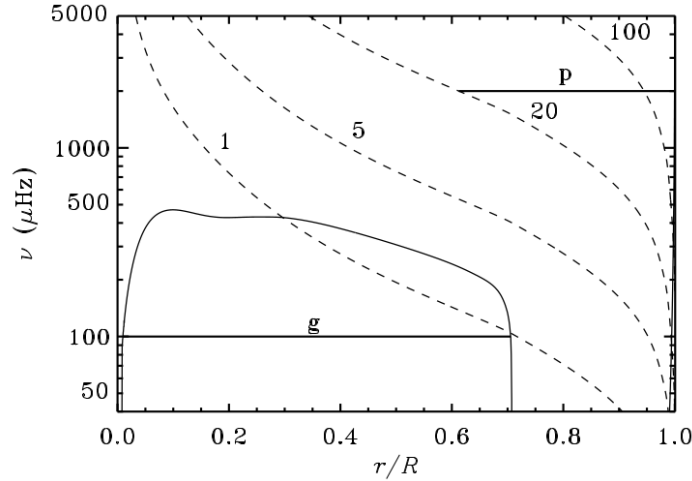


FIGURE 1.5 – Diagramme de propagation réalisé à partir d'un modèle décrivant le soleil. La fréquence de Brunt-Väisälä est représentée par une ligne pleine et la fréquence de Lamb est représentée pour différentes valeurs de  $l$  par des traits tiretés. En trait plein épais, sont représentés les domaines de propagation pour un mode g et un mode p de degré  $l = 20$ . Figure tirée de [Christensen-Dalsgaard \(2003\)](#).

Dans les régions de l'étoile où  $k(r)$  est positif,  $\xi_r$  est une fonction oscillante. Cela se traduit par l'une des conditions suivantes sur la fréquence d'oscillation

$$\omega > |N| \quad \text{et} \quad \omega > S_l, \quad (1.12)$$

$$\omega < |N| \quad \text{et} \quad \omega < S_l, \quad (1.13)$$

En revanche dans les régions où  $K(r)$  est négatif, soit quand la fréquence d'oscillation est intermédiaire entre  $S_l$  et  $N$ , alors le mode est évanescent. La Fig. 1.5 montre bien que les modes qui satisfont la condition 1.12 sont confinés près de la surface. Ce sont les modes de pression ou *modes p*. Il existe aussi un second type de modes, qui satisfont la condition 1.13 et qui sont piégés près du cœur de l'étoile. Ce sont les modes de gravité ou *modes g*.

Cette analyse théorique est vérifiée par le calcul d'oscillations dans des modèles d'étoiles reproduisant le Soleil. Ainsi la Fig. 1.6 montre le comportement radial des modes p et des modes g calculés dans de tels modèles. On y voit très distinctement le confinement des modes p en surface et l'oscillation des modes g près du cœur.

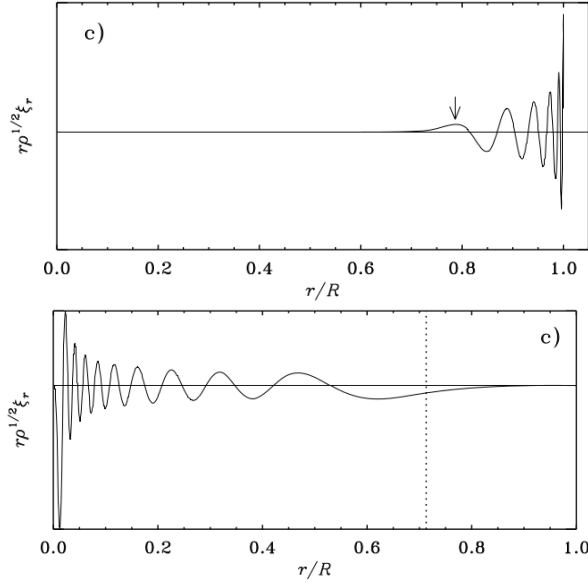


FIGURE 1.6 – Amplitudes  $\xi_r(r)$  de deux modes calculés dans un modèle du Soleil. Haut : mode p de fréquence  $\nu = 3234\mu\text{Hz}$ . Bas : mode g de fréquence  $\nu = 100\mu\text{Hz}$ . Figures tirées de [Aerts et al. \(2010\)](#).

Les valeurs des fréquences  $S_l$  et  $N$  varient néanmoins suivant le modèle d'étoile. Ainsi dans les étoiles qui sont à un stade évolutif avancé, la fréquence de Brunt-Väisälä est du même ordre que les basses fréquences acoustiques. Dans ces conditions, un mode p et un mode g de fréquences très proches échangent leurs propriétés, i.e. ils oscillent à la fois dans la cavité des modes p et des modes g (voir Fig. 1.7). Ces modes prédits par [Osaki \(1975\)](#) sont très intéressants pour l'astérosismologie dans la mesure où ils sont visibles en surface tout en étant capables de sonder l'intérieur stellaire. Ils ont été utilisés notamment pour contraindre la rotation du cœur dans les géantes, voir e.g. [Deheuvels et al. \(2012\)](#).

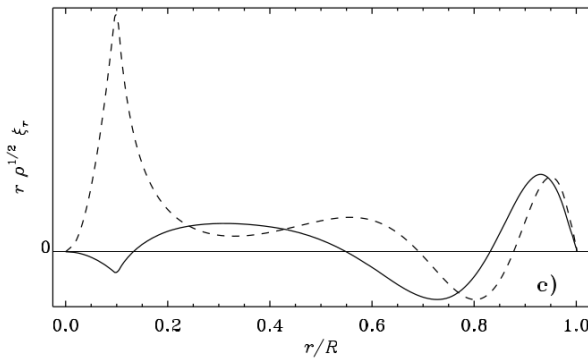


FIGURE 1.7 – Comportement radial de deux modes mixtes résultant du rapprochement en fréquence entre un mode p et un mode g. Figure tirée de [Aerts et al. \(2010\)](#)



## 1.2 Modes de pression dans les pulsateurs classiques en rotation rapide

Dans cette section, nous nous intéressons aux pulsateurs en rotation rapide et plus particulièrement aux  $\delta$  Scuti. Nous verrons que les spectres d'oscillation des  $\delta$  Scuti ont des propriétés très variées en terme de gamme, de nombre et d'amplitudes des fréquences observées. Pour mieux les comprendre d'un point de vue théorique, il faut résoudre un certain nombre de difficultés posées par la rotation rapide. Nous présenterons les principaux effets de la rotation susceptibles d'impacter les modes d'oscillation et les progrès réalisés pour modéliser ces effets. Finalement, nous présenterons des observations récentes qui montrent la présence de régularités dans les spectres de certaines étoiles delta Scuti, ces détections étant compatibles avec les résultats théoriques.

### 1.2.1 Étoiles en rotation rapide

#### Les $\delta$ Scuti

Les  $\delta$  Scuti sont des étoiles de masse intermédiaire, situées à la transition entre les étoiles de faible masse ( $M \leq 1M_{\odot}$ ) ayant un cœur radiatif et une enveloppe convective et des étoiles plus massives ( $M > 2M_{\odot}$ ) ayant un cœur convectif et une enveloppe radiative (Bowman and Kurtz, 2018). Sur le diagramme HR de la Fig. 1.1 elles occupent la région correspondant au croisement de la séquence principale et de la bande d'instabilité des Céphéïdes. Du point de vue des oscillations ce sont des pulsateurs classiques, avec des modes excités principalement par l'action du mécanisme  $\kappa$  au niveau de la couche d'ionisation de He II (voir table 1.1 pour les caractéristiques typiques des oscillations observées).

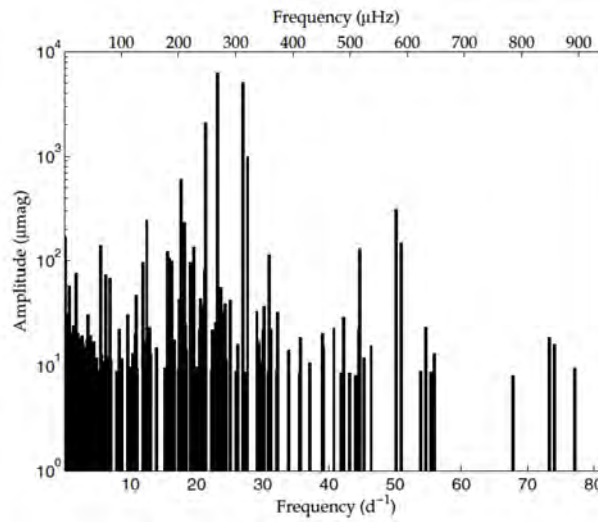


FIGURE 1.8 – Spectre d'oscillation de la  $\delta$  Scuti HD 174966 observée avec CoRoT après extraction des fréquences et des amplitudes. Figure tirée de [García Hernández et al. \(2013\)](#)

On trouve beaucoup de diversité dans les spectres des  $\delta$  Scuti en ce qui concerne le nombre de modes excités, les amplitudes des modes et le domaine de fréquences

observé (Bowman and Kurtz, 2018). Les modes p dans les  $\delta$  Scuti ont majoritairement un faible ordre radial, i.e. des modes proches en fréquence du mode fondamental, mais des modes d'ordre radial élevé, allant jusqu'à  $n \sim 10$ , sont aussi observés. À l'intérieur de la bande d'instabilité, les modèles du mécanisme  $\kappa$  indiquent en effet que la gamme de fréquences excitées varie, essentiellement en fonction du stade évolutif et de la température effective (Dupret et al., 2005). Cela est dû au fait que la profondeur de la couche d'ionisation de He II évolue avec la température effective. Les étoiles situées près du bord bleu de la bande d'instabilité tendent ainsi à osciller à des fréquences plus élevées. En plus des modes p, le mécanisme  $\kappa$  peut exciter des modes mixtes gravito-acoustiques dans les  $\delta$  Scuti les plus évoluées. Cet effet peut densifier et complexifier la partie basse du spectre des modes p. On trouve également une proportion significative d'étoiles  $\delta$  Scuti présentant des oscillations de type  $\gamma$  Doradus, c'est-à-dire des modes g de basses fréquences. Même si l'existence de ces pulsateurs dits hybrides est prédite par les modèles d'excitation, ils couvrent un domaine plus étendu que prévu.

La Fig. 1.9 montre les positions des  $\delta$  Scuti, obtenues avec les données du télescope Kepler, dans le diagramme HR (Bowman and Kurtz, 2018). On constate, malgré un bon accord global, que ces positions sont décalées par rapport à la bande d'instabilité théorique. Une fraction non négligeable des étoiles étant plus chaudes, aussi bien au niveau du bord rouge (basses températures) que du bord bleu (hautes températures) de la bande d'instabilité. Plus intrigant, il est rapporté dans Balona and Dziembowski (2011) que la moitié des  $\delta$  Scuti observées par le télescope Kepler ne montrent pas d'oscillations. Pour comprendre ces observations, il faudrait disposer d'une théorie prédisant les amplitudes des modes linéairement instables. Mais les études sur la saturation non-linéaire des amplitudes ne sont pas encore suffisamment développées pour être prédictives (Dziembowski et al., 1988). Cela constitue une difficulté importante pour l'interprétation des spectres des  $\delta$  Scuti et des étoiles pulsantes excitées par le mécanisme  $\kappa$ .

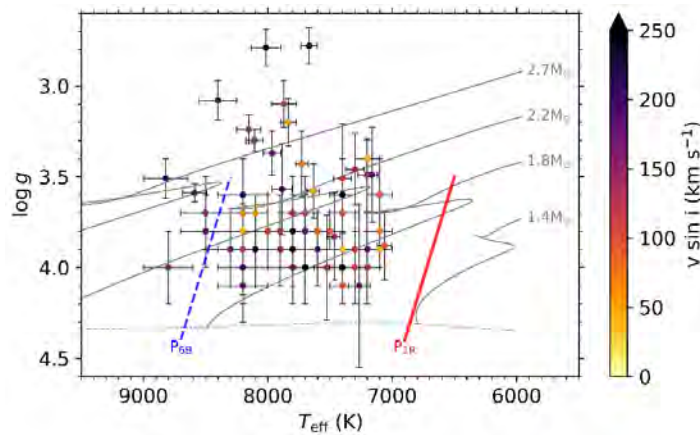


FIGURE 1.9 –  $\delta$  Scuti observées par Kepler et positionnées dans un diagramme HR. Les lignes bleue et rouge correspondent aux bords de la bande d'instabilité d'après Dupret et al. (2005). La couleur indique la vitesse minimale de rotation, montrant que de nombreuses  $\delta$  Scuti sont en rotation rapide  $v \sin i > 100 \text{ km.s}^{-1}$ . Figure tirée de Bowman and Kurtz (2018)

La rotation est une autre source de variabilité dans les  $\delta$  Scuti. La Fig. 1.9 montre

non seulement les positions des  $\delta$  Scuti dans le diagramme HR mais aussi les valeurs mesurées de  $v \sin i$ . On voit que les  $\delta$  Scuti ont des vitesses de rotation variables, un grand nombre d'entre-elles étant en rotation rapide, ce qui constitue une seconde difficulté de taille pour l'interprétation des spectres comme nous allons le voir.

## Effets de la rotation

La plupart des étoiles massives et de masse intermédiaire, dont les  $\delta$  Scuti, sont en rotation rapide comme le montre la Fig. 1.10. Cette figure, qui montre la distribution des  $v \sin i$  pour un échantillon d'étoiles couvrant une très grande gamme de masses, met en évidence un lien entre la vitesse de rotation et la masse : les étoiles de faible masse sont en rotation lente alors que les étoiles massives et de masse intermédiaire sont en rotation rapide. Pour comprendre ce lien il faut remonter à la naissance des étoiles, qui suit l'effondrement d'un nuage moléculaire en rotation. Les étoiles jeunes ont ainsi une vitesse de rotation élevée. Au cours de leur vie, les étoiles vont perdre de la masse, emportée par des vents stellaires. Contrairement aux étoiles massives, les étoiles de faible masse ont une enveloppe convective propice au développement d'un champ magnétique. Selon le mécanisme décrit par [Schatzman \(1960\)](#) le champ magnétique contraint la matière à tourner avec l'étoile, y compris à grande distance où le moment cinétique par unité de masse est très important. Ainsi dans ces étoiles, la perte de masse s'accompagne d'une forte perte de moment cinétique et par suite d'un ralentissement important.

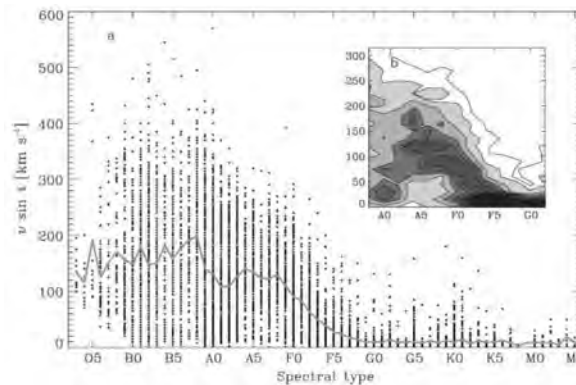


FIGURE 1.10 – Distribution de la vitesse de rotation  $v$  à l'équateur projetée sur la ligne de visée ( $i = 0$  correspond à une étoile vue par le pôle et  $i = 90$  à une étoile vue par l'équateur) en fonction du type spectral. Les  $\delta$  Scuti, de type spectral A-F, sont des rotateurs rapides alors que le soleil, de type spectral G2, est en rotation lente. Figure tirée de [Royer \(2009\)](#).

Aux vitesses de rotations élevées mesurées dans les  $\delta$  Scuti, la force centrifuge a pour effet d'étirer l'étoile au niveau de son équateur. La déformation induite est mesurée par l'*applatissement*  $\epsilon = 1 - R_p/R_{eq}$ , où  $R_p$  est le rayon polaire et  $R_{eq}$  est le rayon équatorial. Comme l'énergie est générée au niveau du cœur, les parties les plus distantes sont les moins chauffées. Ainsi, la température de surface est abaissée au niveau de l'équateur, ce qui se traduit par une plus faible luminosité. On appelle ce phénomène l'*assombrissement gravitationnel*. L'applatissement, comme l'assombrissement gravitationnel, ont

été observés dans les étoiles les plus brillantes via des méthodes d'interférométrie (voir e.g. Cunha et al. (2007); van Belle (2012)). La Fig. 1.11 montre bien que la déformation centrifuge peut devenir importante dans les  $\delta$  Scuti à travers l'exemple d'Altaïr.

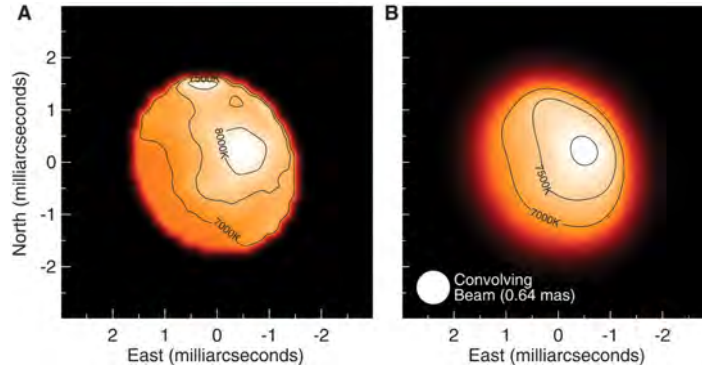


FIGURE 1.11 – Image de la surface d'Altaïr, qui est une étoile de type  $\delta$  Scuti, déformée sous l'effet de la force centrifuge, tirée de (Monnier et al., 2007) et obtenue par interférométrie à la longueur d'onde  $\lambda = 1.65\mu\text{m}$ . Sur le panneau de droite, l'intensité est lissée par convolution avec une fonction Gaussienne.

En plus de la force centrifuge responsable de l'aplatissement, la rotation introduit la force de Coriolis. Dans les étoiles sans rotation les fréquences d'oscillation sont dégénérées  $2\ell + 1$  fois. Par exemple pour  $n$  fixé et  $\ell = 2$  les modes  $m = (-2, -1, 0, 1, 2)$  ont tous la même fréquence. La force de Coriolis a pour effet de lever cette dégénérescence, de manière analogue à l'effet Zeeman en physique atomique (Cohen-Tannoudji et al., 1980). De nouvelles fréquences apparaissent ainsi dans le spectre d'oscillation. Dans le régime des faibles rotation, le comportement de ces fréquences supplémentaires est bien connu (Ledoux, 1951). Ainsi les fréquences  $\omega_{n,\ell,\pm 1}$  se décalent pour former un doublet centré autour de  $\omega_{n,\ell,0}$  et tel que  $|\omega_{n,\ell,1} - \omega_{n,\ell,-1}| = 2\Omega$ . Ce phénomène porte le nom de *splitting rotationnel*. Les modes non-axisymétriques, i.e. de nombre quantique  $m \neq 0$ , correspondent à des ondes progressives (elles sont dites *progrades* si  $m > 0$  et *retrogrades* si  $m < 0$ ).

En plus d'affecter les modes p et surtout les modes g, la force de Coriolis agit comme une force de rappel. Elle est ainsi à l'origine de l'apparition de nouvelles catégories de modes de basses fréquences,  $\omega < 2\Omega$ , dits modes inertiels parmi lesquels les modes de Rossby sont observés (Saio et al., 2018).

Pour résumer, plusieurs difficultés empêchent l'interprétation des spectres des  $\delta$  Scuti. Comme nous l'avons vu, la partie basse du spectre acoustique des  $\delta$  Scuti évoluées peut être affectée par la présence de modes mixtes gravito-acoustiques. Sur le plan théorique, on ne sait toujours pas prédire les amplitudes des modes excités. Dans cette thèse, nous nous concentrons sur l'autre grande difficulté, à savoir les effets de la rotation rapide. Jusqu'à assez récemment, on ne savait pas non plus comment la rotation rapide affectait les modes d'oscillation. Nous allons maintenant passer en revue les avancées effectuées dans cette voie.

## Modèles 2D d'étoiles

L'utilisation de codes 1D modélisant les étoiles et les pulsations est courante et valide si la rotation est faible. Dans ce régime, on peut considérer  $\Omega$  comme un petit paramètre et développer les fréquences en puissances de  $\Omega$  (Ledoux, 1951), la fréquence perturbée est alors donnée par la fréquence du modèle à rotation nulle plus une petite correction. Cette méthode trouve toutefois sa limite quand la perturbation devient trop élevée. Le domaine de validité de la théorie des perturbations (Saio, 1981; Soufi et al., 1998) a été testé pour les modes de pression dans (Lignières et al., 2006; Reese et al., 2006). Dès  $\Omega/\Omega_k = 0.24$ , l'erreur  $(\omega_{pert} - \omega)/\omega$  devient supérieure à l'incertitude liée à la mesure sur la valeur de la fréquence. Cette étude, mais aussi (Ballot et al., 2010) qui s'intéresse aux modes de gravité, montre que le développement des méthodes non perturbatives est une nécessité pour calculer de manière fiable les spectres d'étoiles en rotation rapide.

De grands progrès ont été réalisés dans ce sens, avec le développement des codes d'oscillation 2D TOP (Reese et al., 2006, 2009) et ACOR (Ouazzani et al., 2012) prenant en compte les effets de la rotation. Ces codes s'utilisent en combinaison avec des modèles 2D d'étoiles décrivant la déformation causée par la force centrifuge. Plusieurs méthodes existent pour modéliser les effets de la rotation sur la structure d'équilibre des étoiles. Citons la méthode 'Self Consistent Field' (MacGregor et al., 2007) abrégée SCF, la méthode de Roxburgh (2006) qui consiste à faire évoluer une étoile sphérique avant de la déformer a posteriori suivant un profil de rotation ou les modèles ESTER (Rieutord and Espinosa Lara, 2013; Rieutord et al., 2016) développés pour prendre en compte de façon auto-cohérente les effets baroclines. Le fonctionnement du code TOP sera expliqué dans les grandes lignes au chapitre 3. Puis nous exploiterons ce code dans le chapitre 4 pour calculer les oscillations adiabatiques d'un modèle d'étoile polytropique en rotation.

### 1.2.2 Régularités des modes p dans les modèles d'étoiles en rotation rapide

Si l'on dispose de contraintes suffisamment fortes sur les paramètres fondamentaux d'une étoile pulsante, une approche possible pour l'identification des fréquences observées est de chercher un modèle d'étoile 2D en rotation compatible avec ces contraintes puis de le faire osciller pour comparer directement les fréquences théoriques avec les fréquences observées. L'information sur la stabilité des modes doit notamment permettre de sélectionner ceux qui sont excités par le mécanisme  $\kappa$ . Mirouh et al. (2013) ont tenté d'exploiter ces méthodes pour reproduire le spectre de l'étoile  $\alpha$  Ophiuchi, qui est une  $\delta$  Scuti ayant une vitesse angulaire élevée et pour laquelle on dispose de nombreuses données dont des données interférométriques (voir aussi Deupree et al. (2012)). Ils ont pour cela généré un modèle d'étoile à l'aide du code ESTER, puis ils ont calculé les oscillations de ce modèle en utilisant le code TOP. Les résultats négatifs publiés dans cette étude mettent en évidence les limites actuelles pour réaliser la sismologie détaillée des étoiles en rotation rapide.

Une autre voie vers l'identification des modes, qui donne d'excellents résultats dans les pulsateurs de type solaire, consiste à utiliser la structure asymptotique du spectre d'oscillation. Dans cette section, nous résumons les résultats théoriques obtenus sur la structure asymptotique des modes p dans les étoiles en rotation rapide. Les codes

d'oscillations que nous venons d'introduire ont permis d'explorer numériquement les propriétés des modes de pression, et en particulier d'étudier comment la structure du spectre des fréquences se réorganise quand la rotation devient importante (Lignières et al., 2006; Reese et al., 2006; Lignières and Georgeot, 2008, 2009; Reese et al., 2008, 2009; Pasek et al., 2011, 2012; Reese et al., 2017). La présence d'une grande séparation dans le spectre a été établie par ces explorations numériques, une distinction importante avec les étoiles en rotation lente étant l'absence de petite séparation (Lignières et al., 2006). Les calculs effectués à haute fréquence (Reese et al., 2008, 2009; Lignières and Georgeot, 2008, 2009; Pasek et al., 2011, 2012) ont confirmé le caractère asymptotique de cette régularité et ont conduit au développement d'une théorie asymptotique, que nous détaillerons au chapitre 3, pour en comprendre l'origine.

La présence d'une grande séparation dans le spectre a été établie par la modélisation et confirmée par les observations dans les  $\delta$  Scuti (voir la section suivante). Nous détaillerons dans le chapitre 3 l'apport de l'analyse asymptotique pour donner un sens physique précis à cette grande séparation.

À haute rotation, les modes de pression ne sont plus décrits par une fonction de la forme  $p'(r) Y_l^m(\theta, \phi)$ . De nouveaux modes apparaissent avec leur géométrie propre, appelés *modes d'îlot*, modes *chaotiques* et modes *whispering gallery* (voir Fig. 1.12). Le spectre total à rotation rapide correspond à une somme de sous-spectres indépendants ayant chacun son organisation propre (Lignières and Georgeot, 2008). Le spectre des modes d'îlot est décrit par une formule empirique de la forme

$$\omega_{n,\ell,m} = \tilde{n}\delta_n + \tilde{\ell}\delta_\ell + \alpha, \quad (1.14)$$

rappelant la formule de Tassoul, où  $\delta_n$  est une demie grande séparation,  $(\tilde{n}, \tilde{\ell})$  les nombres quantiques présentés sur la Fig. 1.12 et  $\alpha$  une constante. Les modes d'îlot ont été produits dans des modèles polytropiques (Reese et al., 2008; Pasek et al., 2011, 2012) et dans des modèles réalistes (Reese et al., 2009; Ouazzani et al., 2015) et montrent toujours ce comportement régulier à haute fréquence.

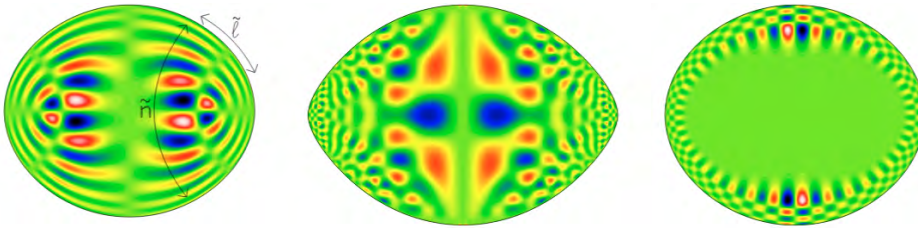


FIGURE 1.12 – Mode d'îlot (gauche), mode chaotique (milieu) et mode whispering gallery calculés avec le code TOP pour un modèle d'étoile SCF. Les nombres  $\tilde{n}$  et  $\tilde{\ell}$  sont les analogues de l'ordre radial et du degré pour les modes d'îlots. Figure tirée de Reese et al. (2009).

Les calculs de Lignières and Georgeot (2009); Reese et al. (2013) montrent que seuls les modes d'îlot et les modes chaotiques devraient être visibles car l'effet d'annulation par la moyenne sur le disque stellaire est très efficace pour les modes whispering gallery.

Lignières and Georgeot (2008) ont établi une classification formelle de ces modes basée sur les trajectoires des rayons sous-jacents (voir le chapitre 3). Dans la limite asymptotique, les modes d'îlot sont associés à des trajectoires piégées dans un *îlot de*

*stabilité* autour d'une orbite centrale stable. Les modes d'îlot ont fait l'objet d'une analyse asymptotique détaillée dans [Pasek et al. \(2011, 2012\)](#). Cette analyse montre en particulier que la demie grande séparation  $\delta_n$  est reliée à l'inverse de la vitesse du son le long de l'orbite périodique stable de l'îlot.

Les modes chaotiques sont associés à des trajectoires *chaotiques*, i.e. telles que les trajectoires voisines divergent exponentiellement. Dans le chapitre 2, nous introduirons le formalisme de la physique semiclassique qui permet de construire des modes d'oscillation à partir de la limite des rayons. Nous insisterons particulièrement sur le cas des modes chaotiques, qui sont l'objet de cette thèse et que nous étudions au chapitre 4. Le formalisme semiclassique nous aidera aussi à expliquer plus naturellement, au chapitre 3, l'analyse développée dans [Lignières and Georgeot \(2008, 2009\)](#).

La régularité des modes d'îlot est donc fermement établie sur le plan théorique, aussi bien par le calcul numérique que par l'analyse asymptotique. [Lignières et al. \(2010\)](#); [Reese et al. \(2017\)](#) ont cherché des régularités dans des spectres d'oscillation artificiels où ils ont multiplié les amplitudes intrinsèques des modes par un facteur de visibilité. En supposant l'amplitude intrinsèque identique pour tous les modes, il est possible de retrouver la demie grande séparation, la grande séparation et le splitting rotationnel  $2\Omega$  à différentes valeurs de l'inclinaison. Les résultats sont en revanche plus mitigés si on suppose une amplitude intrinsèque variable d'un mode à l'autre et définie aléatoirement.

### 1.2.3 Recherche de régularités dans les $\delta$ Scuti

Les études théoriques suggèrent qu'un type de modes présentant des régularités, les modes d'îlot, devraient être présents dans les rotateurs rapides. Pour aller plus loin, [Reese et al. \(2008\)](#) montre dans le cas de modèles polytropiques que la grande séparation  $\Delta_\nu$  des modes d'îlot et la densité moyenne  $\bar{\rho}$  sont reliés par une loi d'échelle, qui dépend faiblement de la rotation. Cette nouvelle grande séparation est donc potentiellement, comme dans les pulsateurs de type solaire, une observable cruciale permettant de remonter aux paramètres fondamentaux des étoiles. Parallèlement, la détection d'écarts réguliers en fréquence dans les  $\delta$  Scuti ([García Hernández et al., 2009](#); [García Hernández et al., 2013](#); [García Hernández et al., 2015](#); [Paparó et al., 2016](#); [Michel et al., 2017](#)), rendue possible par les données photométriques ultra précises de l'astérosismologie spatiale, a constitué une étape importante pour confirmer la validité des résultats théoriques (malgré les basses fréquences d'oscillation dans ces étoiles). La détection de régularités constitue en soi un résultat important. Pour maximiser les chances de trouver des régularités parmi la multitude de  $\delta$  Scuti observées, des analyses récentes cherchent à isoler préférentiellement des étoiles jeunes avec des pulsations de haute-fréquences pour se rapprocher du régime asymptotique ([Michel et al., 2017](#)).

[García Hernández et al. \(2015\)](#) vont plus loin en examinant la relation qui lie  $\Delta_\nu$  à  $\bar{\rho}$ . Les sources astrophysiques sélectionnées dans cette étude sont des systèmes binaires ('eclipsing binaries') avec une composante de type  $\delta$  Scuti. En effet les systèmes binaires permettent de déterminer les densités moyennes de manière fiable et indépendante du modèle d'intérieur stellaire ou de pulsation (la méthode utilisée consiste à calculer la densité à partir de l'approximation du modèle de Roche ([Kippenhahn and Weigert,](#)

1990; Maeder, 2009), en considérant que les rayons mesurés correspondent au rayon équatorial). Grâce à cette méthode, la relation suivante

$$(\bar{\rho}/\bar{\rho}_{\odot}) = 1.55(\Delta\nu/\Delta\nu_{\odot})^{2.035}, \quad (1.15)$$

a pu être établie observationnellement pour les  $\delta$  Scuti en rotation (voir aussi Fig. 1.13, panneau de gauche). La binarité a aussi l'avantage de permettre une estimation de la rotation. En supposant que l'axe de rotation de l'étoile est perpendiculaire au plan orbital, il suffit d'avoir accès à la mesure du rayon et de la vitesse projetée  $v \sin i$  pour remonter à la vitesse de rotation, qui est mesurée en unité de  $\Omega_k = (GM/R_{eq})^{1/2}$  correspondant à la rotation Képlérienne<sup>3</sup>. Sur le panneau de droite de la Fig. 1.13, on constate que la relation entre la grande séparation et la densité est indépendante de la rotation.

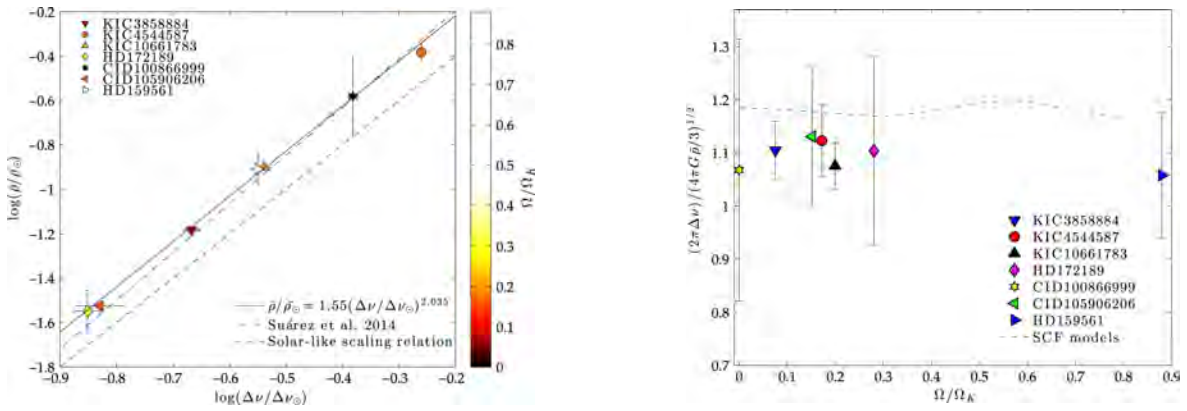


FIGURE 1.13 – Gauche : Loi d'échelle reliant la grande séparation et la densité moyenne pour sept  $\delta$  Scuti observées appartenant à des systèmes binaires. La loi d'échelle correspondante pour le soleil est tracée à titre de comparaison ainsi que la loi calculée pour des modèles de  $\delta$  Scuti sans rotation. Droite : Grande séparation renormalisée par la racine carré de la densité moyenne pour six étoiles de rotation  $\Omega/\Omega_k < 0.4$  et une étoile de rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.88$ . Cette grandeur ne semble pas varier avec la rotation, comme l'avait déjà pressenti Reese et al. (2008) par le calcul 2D des modes de pulsations. Figures tirées de (García Hernández et al., 2015).

3. Une quantité voisine de la rotation Képlérienne  $\Omega_k$  est la *rotation critique*  $\Omega_c = (g_{eq}/R_{eq})^{1/2}$  où la force centrifuge compense la gravité à l'équateur  $g_{eq}$ , ce qui peut engendrer une perte de matière par exemple à cause des oscillations de surface. La rotation Képlérienne peut être vue comme une approximation de  $\Omega_c$  qui suppose une distribution sphérique de la matière.



## Chapitre 2

# Outils du chaos quantique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Intégrabilité et chaos dans les systèmes Hamiltoniens . . .</b>	<b>24</b>
2.1.1	Rappels sur les systèmes Hamiltoniens . . . . .	24
2.1.2	Systèmes intégrables . . . . .	27
2.1.3	Systèmes chaotiques . . . . .	29
2.1.4	Systèmes mixtes . . . . .	31
<b>2.2</b>	<b>Physique semiclassique . . . . .</b>	<b>33</b>
2.2.1	Systèmes Hamiltoniens et mécanique quantique . . . . .	33
2.2.2	Limite semiclassique . . . . .	36
2.2.3	Intégrabilité et chaos en physique quantique . . . . .	41
2.2.4	Propriétés statistiques des spectres quantiques . . . . .	47
2.2.5	Universalité dans les systèmes chaotiques . . . . .	50

---

En physique quantique, la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$  permet d'obtenir un système Hamiltonien à partir d'une équation de Schrödinger. De cette manière, on dérive le système classique analogue à un système quantique. Les méthodes de la physique semiclassique permettent de construire, dans le régime des hautes fréquences, des fonctions d'ondes sur les trajectoires du système classique. La littérature qui traite de ces méthodes est usuellement axée sur les applications dans les domaines de la physique quantique. Les méthodes semiclassiques sont néanmoins valides pour d'autres systèmes ondulatoires, comme par exemple les ondes lumineuses. Elles peuvent également s'appliquer aux oscillations stellaires (Gough, 1993). Dans ce contexte on les appelle préférentiellement *méthodes asymptotiques*.

La nature du système Hamiltonien joue un rôle déterminant en physique semiclassique. Si le système est intégrable, alors on peut construire des modes en appliquant la méthode de quantification EBK. La formule de Tassoul est un exemple de quantification d'un système Hamiltonien intégrable, au même titre que la formule décrivant le spectre des modes d'îlot (Pasek et al., 2011). Si le système Hamiltonien est chaotique, d'autres méthodes de quantification doivent être appliquées : les méthodes du *chaos quantique*. L'application des méthodes du chaos quantique aux oscillations d'étoiles fut évoquée initialement par Perdang (1986). On trouve aussi dans Gough (1993) une mention de ce sujet, mais il n'est pas exploré. Le sujet fut ramené au premier plan par Lignières and Georgeot (2008, 2009) qui montrèrent que les étoiles en rotation

présentent des modes de pression chaotiques, i.e. associés à des trajectoires chaotiques d'un système Hamiltonien. On peut mentionner aussi [Prat et al. \(2016\)](#) et [Loi and Papaloizou \(2018\)](#), qui s'intéressent respectivement aux ondes de gravité et aux ondes dans un milieu magnétisé, et qui trouvent des trajectoires chaotiques dans la limite des petites longueurs d'onde.

Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler des notions de mécanique Hamiltonienne, en insistant sur les différences entre les systèmes intégrables et chaotiques. Nous introduirons ensuite les méthodes de quantification de la physique semiclassique, en particulier les méthodes du chaos quantique. Au chapitre 4 nous appliquerons ces méthodes pour mieux comprendre, d'un point de vue théorique, la structure asymptotique des modes de pression chaotiques dans les étoiles en rotation rapide.

## 2.1 Intégrabilité et chaos dans les systèmes Hamiltoniens

Les équations de la mécanique Hamiltonienne sont présentes dans de nombreux domaines de la physique. Elles permettent de résoudre aussi bien des problèmes de mécanique classique, comme la chute d'un point matériel dans un champ de pesanteur, que des problèmes d'optique géométrique, ou encore de décrire les lignes de champ magnétique dans un plasma ([Ott, 2002](#)). La mécanique Hamiltonienne fournit des concepts prolifiques, comme la notion de variables conjuguées, qui servent de socle à la formulation traditionnelle de la mécanique quantique (voir section [2.2.1](#)). Dans cette section, nous allons d'abord reprendre les concepts fondamentaux qui permettent de se familiariser avec les systèmes Hamiltoniens. Dans un second temps, nous introduirons les notions d'intégrabilité et de chaos.

### 2.1.1 Rappels sur les systèmes Hamiltoniens

En mécanique analytique sans dissipation, toute l'information sur le système dynamique considéré est contenue dans une unique fonction scalaire, le Lagrangien (formulation Lagrangienne) ou le Hamiltonien (formulation Hamiltonienne). Dans les deux formulations, les positions sont exprimées dans les coordonnées généralisées  $\{q_i\}$ , définies comme  $N$  coordonnées indépendantes, où  $N$  correspond au nombre de degrés de liberté du système. Pour illustrer le concept de coordonnées généralisées, examinons le cas du pendule simple. La masse, fixée au bout d'une corde rigide de longueur  $\ell$ , décrit un mouvement plan. On peut repérer la position de cette masse en utilisant les coordonnées cartésiennes  $x(t)$  et  $y(t)$ , mais ce choix n'est pas économe car  $x(t)$  et  $y(t)$  sont liées par la contrainte  $\ell = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Dans ce système, l'angle  $\theta(t)$  entre la corde et la normale est l'unique degré de liberté. La coordonnée généralisée est donc  $q = \theta$ .

L'état d'un système Hamiltonien est décrit par deux variables, son moment  $\mathbf{p} = \{p_i\}$  et sa position  $\mathbf{q} = \{q_i\}$ , où  $i = 1 \dots N$ . L'état se modélise donc par un point dans *l'espace des phases* de dimension  $2N$ . Cela signifie que la donnée de ces deux variables à un instant  $t$ , ajoutée à la donnée des paramètres constants comme la charge électrique d'une particule, est suffisante pour connaître tous les états antérieurs et futurs du système. L'évolution du système, qui se traduit par une trajectoire  $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$  dans

l'espace des phases, est entièrement déterminée par le Hamiltonien  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ , suivant les équations de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad (2.1)$$

où le point exprime la dérivée temporelle. La forme de ces équations est dite *canonique*. De même, tout jeu de variables  $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})$  qui préserve la structure des équations, au prix d'un changement de Hamiltonien  $H \rightarrow \bar{H}$ , est dit canonique et les variables  $\bar{\mathbf{p}}$  et  $\bar{\mathbf{q}}$  sont dites *conjuguées*.

Soit  $\mathbf{x}$  le vecteur des coordonnées dans l'espace des phases, par exemple  $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Dans l'étude des systèmes dynamiques, on distingue les systèmes en temps continu

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{F}$  est appelée *le flot*, des systèmes en temps discret

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n), \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{T}$  est *une application* ('map' en anglais).

Passons en revue quelques propriétés importantes des systèmes dynamiques Hamiltoniens. D'abord, le déterminisme impose qu'à toute condition initiale ne corresponde qu'une seule évolution possible (les équations 2.1 n'ont qu'une seule solution pour une condition initiale donnée). Il suit que *deux trajectoires de l'espace des phases ne peuvent pas se croiser*. Du même principe, le déterminisme, il découle qu'une boucle  $\Gamma_1$  qui encercle un groupe de trajectoires à l'instant  $t = t_1$  se transforme en une boucle  $\Gamma_2$  qui encercle les mêmes trajectoires à l'instant  $t = t_2$ . Cette propriété permet de suivre un tube de trajectoires en se concentrant sur sa frontière.

Les trajectoires de l'espace des phases peuvent évoquer les lignes de courant de la mécanique des fluides. Le *théorème de Liouville* donne du sens à cette analogie. Soit  $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$  la densité de trajectoires dans une volume infinitésimal  $\prod_{i=1}^N dp_i dq_i$ , alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = 0. \quad (2.4)$$

Le théorème de Liouville énonce que le volume de l'espace des phases est conservé le long des trajectoires, ou autrement dit que le "fluide Hamiltonien" est incompressible. Cette propriété peut être exploitée pour définir des invariants. Ainsi, un premier invariant est donné par le théorème de Poincaré-Cartan (Ott, 2002)

$$\oint_{\Gamma_1} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) = \oint_{\Gamma_2} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt), \quad (2.5)$$

où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux courbes fermées dans l'espace des phases étendu de dimension  $2N + 1$ , qui encerclent les mêmes trajectoires. Cela se traduit par la conservation de l'intégrale  $\oint (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt)$  sur la frontière d'un tube de trajectoires. Dans le cas particulier des systèmes autonomes où le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps,

la boucle  $\Gamma$  est contrainte sur l'espace des phases de dimension  $2N$  et n'a donc pas d'extension  $dt$  dans la direction temporelle. Il suit que le second terme  $\oint_{\Gamma} H dt$  s'annule. On obtient de cette façon *l'intégrale de Poincaré*, qui est un invariant fondamental (voir à ce propos la section suivante)

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}, \quad (2.6)$$

où  $\Gamma_1$  est l'image de  $\Gamma_2$  par le flot Hamiltonien. Plus généralement, on définit *l'action*  $S$  comme

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}. \quad (2.7)$$

Il est difficile de se représenter l'espace des phases de dimension  $2N$ , même dans le cas d'un système simple à deux degrés de liberté. S'il existe une quantité conservée, par exemple l'énergie pour un système autonome, alors le mouvement est contraint sur la surface d'énergie, définie par  $E = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , de dimension  $2N - 1$ . Il suffit de fixer un paramètre parmi  $\mathbf{p} = p_1, \dots, p_N$  et  $\mathbf{q} = q_1, \dots, q_N$  pour obtenir une section de l'espace de dimension  $2N - 2$ , appelée *section de Poincaré* (PSS, de l'anglais 'Poincaré surface of section'). Trois règles doivent être respectées pour obtenir une section de Poincaré exploitable. D'abord, il faut que la PSS intercepte toutes les trajectoires que l'on désire étudier. Ensuite, chaque point doit avoir une seule image et un seul antécédent sur la PSS. Pour garantir cela, il est nécessaire d'orienter la PSS, c'est-à-dire de ne représenter que les trajectoires qui la traverse dans un sens, comme le montre la Fig. 2.1. La PSS a pour effet de transformer le flot continu en application discrète, dite *application de Poincaré*. La troisième règle est de veiller à ce que l'aire sur la PSS soit conservée sous l'action de l'application de Poincaré. Ceci est garanti du moment que les coordonnées utilisées sont des variables conjuguées (Ott, 2002).

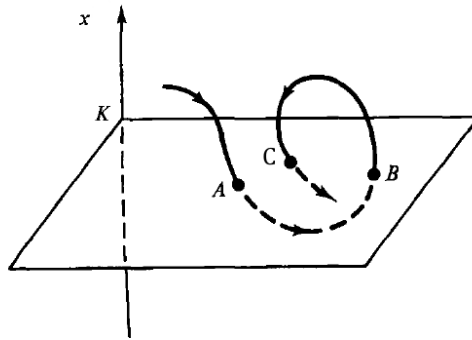


FIGURE 2.1 – Intersection d'une trajectoire avec la section de Poincaré  $x = \text{cst}$ . Seuls les points A et C traversant la section de Poincaré vers les  $x < 0$  sont pris en compte. Figure adaptée de (Ott, 2002).

Intéressons-nous à l'application obtenue à l'aide d'une section de Poincaré. Chaque intersection d'une orbite périodique avec la PSS est un point fixe de l'application  $T^p$ , où  $p$  est un entier représentant la période de la trajectoire. L'étude de la stabilité renseigne sur le comportement des trajectoires à proximité des points fixes. Dans l'approximation linéaire, la stabilité de l'orbite périodique est donnée par la *matrice de monodromie*  $M$ ,

dont le déterminant vaut  $\det(M) = 1$  et qui donne le déplacement d'une orbite voisine après une période :

$$\begin{pmatrix} \delta_{y'} \\ \delta_{p'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_y \\ \delta_p \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

où  $y$  désigne la coordonnée transverse à l'orbite périodique. Les valeurs propres de la matrice de monodromie viennent par paires  $(\lambda, 1/\lambda)$ . On distingue trois cas

- les orbites neutres :  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  ou  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ,
- les orbites *elliptiques* (stables) :  $\lambda_1 = e^{i\theta}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ ,  $\theta \neq \{0, \pi\}$ ,
- les orbites *hyperboliques* (instables) :  $\lambda_1 = \pm e^u$ ,  $\lambda_2 = \pm e^{-u}$ ,  $u \in \mathbb{R}^+$ .

Sur la PSS, les points fixes hyperboliques sont à la croisée d'une direction stable et d'une direction instable. La dynamique est déstabilisée au voisinage des points hyperboliques, ce qui peut mener à la *chaos*. À l'inverse, les trajectoires voisines sont satellisées autour d'un point fixe stable.

### 2.1.2 Systèmes intégrables

Lorsqu'un système dynamique admet des solutions exactes par intégration, il est dit *intégrable*. Ces systèmes sont particulièrement familiers des étudiants en physique, car la plupart des problèmes académiques classiques de la physique (le pendule simple, le problème képlérien à deux corps) sont exactement solubles. Une autre définition de l'intégrabilité découle de l'existence de constantes du mouvement. Introduisons les crochets de Poisson

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right), \quad (2.9)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ . La dérivée temporelle d'une fonction  $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  s'exprime comme le crochet de Poisson de la fonction avec le Hamiltonien (Ott, 2002).

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Cette propriété permet d'écrire les équations du mouvement sous une forme parfaitement symétrique

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (2.11)$$

Une constante du mouvement se définit donc par  $\{f, H\} = 0$ . On dit qu'un système est intégrable s'il existe autant de constantes du mouvement  $\{f_i\}$  que de degré de liberté. De plus ces constantes doivent être en *involution*, ce qui revient à vérifier la condition d'indépendance :

$$\{f_i, f_j\} = 0 \quad \forall i \neq j. \quad (2.12)$$

Il n'existe pas de critère général pour garantir l'intégrabilité d'un système Hamiltonien (Lichtenberg and Lieberman, 1992). On sait toutefois que les systèmes à variables séparables sont intégrables. C'est le cas *e.g.* du mouvement d'un oscillateur harmonique

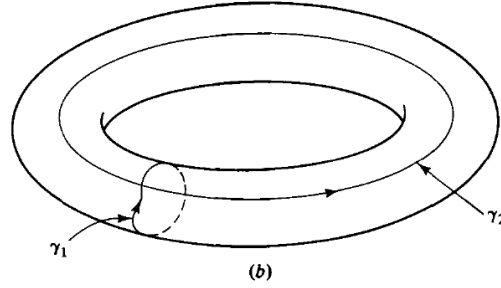


FIGURE 2.2 – Deux chemins irréductibles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sur un tore de dimension 2.

en deux dimensions. La condition 2.12 contraint le mouvement sur une surface ayant la topologie d'un tore (pour la démonstration, voir (Lichtenberg and Lieberman, 1992)) de dimension  $N$ . De ce fait, l'espace des phases des systèmes intégrables est rempli de  $N$ -tores concentriques, on parle alors de *feuilletage*. On peut exploiter le théorème de Poincaré-Cartan pour trouver des constantes du mouvement sur les tores. Pour cela, on définit  $N$  chemins fermés indépendants  $\gamma_i$  comme sur la Fig. 2.2. Ces chemins sont dits *irréductibles*, au sens où il est impossible de les réduire à un point par déformation continue sur le tore. Prenant pour point de départ un chemin irréductible, e.g.  $\gamma_1$  sur la Fig. 2.2, on peut engendrer un nouveau chemin irréductible  $\gamma'_1$  par déformation continue de  $\gamma_1$  sur le tore. Comme  $\gamma_1$  et  $\gamma'_1$  encerclent le même tube de trajectoires, il suit par application du théorème de Poincaré-Cartan que l'action  $\oint_{\gamma} \mathbf{p} d\mathbf{q}$  ne varie pas par déformation continue des chemins irréductibles. En revanche sur tous les chemins fermés *réductibles* l'intégrale d'action est nulle. Il y a donc autant de constantes du mouvement que de chemins irréductibles indépendants sur le tore, soit  $N$  constantes pour un tore de dimension  $N$ .

Dans un système arbitraire de coordonnées les tores, ainsi que les trajectoires qu'ils supportent, apparaissent en général déformés en comparaison de l'image idéale présentée sur la Fig. 2.2. Par 'chance', le *théorème de Liouville-Arnold* assure l'existence de coordonnées canoniques privilégiées pour décrire les systèmes intégrables, appelées *variables angle-action*, dans lesquelles les tores reprennent leur forme idéale ("en donut" pour un tore à deux dimensions), ce qui simplifie considérablement la description des trajectoires. On note ces variables  $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) \rightarrow (\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$ , où chaque moment  $I_i$  est défini comme l'action calculée le long d'un chemin irréductible  $\gamma_i$  :

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \mathbf{p} d\mathbf{q}. \quad (2.13)$$

Les variables  $\theta_i$  sont assimilables à des angles en ceci qu'elles augmentent de  $2\pi$  après une période autour du tore suivant  $\gamma_i$ . Dans ces coordonnées, les équations de Hamilton prennent une forme très simple

$$\{I_i, H\} = 0 \quad \{\theta_i, H\} = \omega_i. \quad (2.14)$$

Si  $\theta_i$  s'interprète comme un angle alors  $\omega_i$  correspond à une vitesse angulaire ou une fréquence. L'ensemble des fréquences  $\omega_i$  est rassemblé dans le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$ . On distingue alors deux types de tores. Les plus nombreux sont les tores quasi-périodiques, où irrationnels, sur lesquels les trajectoires ne bouclent pas sur elles-mêmes et remplissent la

surface du tore. À l'opposé il y a les tores rationnels sur lesquels les trajectoires sont périodiques. Les tores rationnels sont définis par l'existence des entiers  $\mathbf{m} = m_1, \dots, m_N$  tels que

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{m} \omega_0, \quad (2.15)$$

où  $\omega_0$  est un scalaire. En partant de la définition 2.15 d'un tore rationnel, on comprend qu'il doit aussi exister des tores partiellement rationnels où seulement quelques composantes  $\omega_i$  du vecteur des fréquences sont de la forme  $\omega_i = m_i \omega_0$ . Les tores complètement rationnels sont de mesure nulle (ils n'occupent pas de volume dans l'espace des phases), mais sont denses dans l'espace des phases, c'est-à-dire qu'il existe un tore rationnel dans le voisinage immédiat de tout tore irrationnel.

### 2.1.3 Systèmes chaotiques

Steven Strogatz résume le chaos comme (Strogatz, 2001) « un comportement apériodique de longue durée dans un système déterministe et sensible aux conditions initiales ». Cette dernière caractéristique est sûrement celle qui vient le plus naturellement à l'esprit quand on mentionne le chaos. Un système est sensible aux conditions initiales si deux trajectoires de l'espace des phases initialement proches et séparées d'une distance  $\delta_0$  s'éloignent exponentiellement avec le temps

$$\delta(t) = \delta(0) e^{ht}. \quad (2.16)$$

Le taux de divergence des trajectoires est donné par l'exposant  $h$ . Dans la limite des temps longs et des petites distances, on parle de *l'exposant de Lyapunov*

$$h = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \delta(0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \log \left( \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right). \quad (2.17)$$

Au voisinage d'une orbite périodique, l'exposant de Lyapunov est directement lié aux valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice de monodromie :  $h_i = 1/\delta t \log(\lambda_i)$ . Nous avons vu, dans la section 2.1.1, que ces valeurs propres viennent par paires  $(\lambda, \lambda^{-1})$ . Par conséquent les exposants de Lyapunov viennent eux aussi par paires, mais de signe opposé  $(h, -h)$ .

La divergence exponentielle des trajectoires a des conséquences immédiates sur l'expérience, puisqu'elle implique une amplification de l'erreur initiale due à l'imprécision de la mesure. Même dans le cadre des expériences numériques, l'erreur d'arrondi sur la valeur initiale est rapidement amplifiée (y compris en négligeant les erreurs liées à la méthode numérique elle-même). Supposons, comme (Ott, 2002) que l'erreur, initialement de  $10^{-16}$ , double à chaque itération. L'écart entre la vraie trajectoire et la trajectoire numérique atteint la taille du système si  $2^n \times 10^{-16} = 1$ , soit  $n = \ln(10^{16})/\ln(2) \sim 53$  itérations. Si l'on veut prédire l'évolution du système sur  $2n = 106$  itérations il est nécessaire d'atteindre une précision machine de  $10^{-32}$ , ce qui revient à ajouter 16 ordres de grandeur !

Le chaos est un frein important à notre capacité de prédiction au long terme. C'est cette conclusion que Lorenz avait mis en avant à la suite de ses travaux sur la modélisation de la météorologie. Doit-on pour autant en déduire que la résolution numérique des systèmes dynamiques chaotiques est impossible? Cette question trouve une réponse partielle via *le lemme de l'ombre* ('shadowing lemma' en anglais). En effet, il a été montré (Palmore and McCauley, 1987) que, bien que la trajectoire numérique diverge exponentiellement de la vraie trajectoire  $\mathbf{x}(t)$ , il existe une vraie trajectoire du système, voisine au point initial de  $\mathbf{x}(t)$  et qui reste proche de la trajectoire numérique au cours de son évolution. Au final, les trajectoires calculées sont donc bien physiques.

Le chaos est souvent associé à la présence d'*attracteurs étranges*, comme e.g. les attracteurs de Lorenz et de Hénon. Notons que ce n'est pas le cas pour les systèmes Hamiltoniens, car le théorème de Liouville (Éq. 2.4) interdit l'existence d'attracteurs. Une autre propriété fondamentale des systèmes chaotique est *l'ergodicité*. Pour toute observable  $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , l'ergodicité est définie comme

$$\bar{w}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \langle w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rangle, \quad (2.18)$$

où  $\bar{\cdot}$  est une moyenne temporelle et  $\langle \cdot \rangle$  est une moyenne sur tout l'espace des phases (Lichtenberg and Lieberman, 1992). Aux temps longs, les trajectoires d'un système ergodique recouvrent densément l'espace des phases, au sens où une trajectoire typique (non périodique) passe arbitrairement proche de tout point de l'espace des phases. Ainsi les propriétés de long terme du système ne dépendent pas de la condition initiale. Ce phénomène s'illustre bien par le fait qu'il est impossible de réaliser une prédiction météorologique fiable au-delà de quelques jours, à cause de l'incertitude sur l'état du système à un instant  $t$ , tandis que l'on peut faire de la prospective concernant le climat (compris comme l'étude des propriétés statistiques globales des conditions météorologiques).

Les systèmes chaotiques sont classés par degré ou niveau de chaos. Comme chaque niveau implique les niveaux inférieurs, on parle d'une hiérarchie des systèmes chaotiques :

systèmes K  $\subset$  mélange  $\subset$  ergodicité.

Le mélange ('mixing' en anglais) est une propriété plus forte que l'ergodicité qui implique une forme d'homogénéité de l'espace des phases. Cette propriété se comprend aisément par analogie avec les liquides. Si on verse dans un verre 20% de sirop de menthe complété avec de l'eau, après avoir mélangé la boisson on obtient un liquide homogène où chaque parcelle de fluide contient 20% de sirop de menthe. Pour avoir du mélange dans un système dynamique, il faut que chaque trajectoire (non périodique) visite en égale proportion chaque parcelle de l'espace des phases, et ce à toutes les échelles. Formellement, le mélange se définit comme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(\phi_t(A) \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(A)}{\mu_{\text{total}}}, \quad (2.19)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux parcelles quelconques de l'espace des phases,  $\mu$  est une mesure et  $\phi_t$  désigne l'évolution temporelle du système. Au niveau encore supérieur, on trouve *les*



systèmes  $K$ , pour lesquels on a une divergence exponentielle des trajectoires proches (exposants de Lyapunov positifs). Ils sont définis par une entropie de Kolmogorov  $h_M$  positive, aussi appelée *entropie métrique*, qui mesure la vitesse de mélange du système. L'entropie métrique est la somme des exposants de Lyapunov positifs

$$h_M = \sum_{h_i > 0} h_i. \quad (2.20)$$

L'entropie topologique  $h_T$  correspond au taux de croissance du nombre d'orbites discernables  $N(T)$  en fonction du temps  $T$ . La densité d'orbites périodiques dans un intervalle  $T, T + dT$  est une grandeur bien définie, qui croît exponentiellement

$$\begin{aligned} \rho(T) &\equiv \frac{N(T + dT) - N(T)}{dT} \\ &\approx \frac{1}{T} e^{h_T T} \quad \text{as } T \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les entropies métriques et topologiques sont en général proches ou souvent identiques (Adler et al., 2008).

## 2.1.4 Systèmes mixtes

### Régime perturbatif

La transition depuis un régime intégrable vers un régime mixte où coexistent des zones intégrables et des zones chaotiques est décrite par *le théorème KAM*, nommé d'après Kolmogorov, Arnold et Moser. Dans le cas où un Hamiltonien intégrable  $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  subit une petite perturbation

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \epsilon H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (2.22)$$

le théorème énonce que les tores irrationnels survivent et sont simplement déformés par la perturbation, c'est-à-dire qu'il existe un tore du système perturbé tel que  $\boldsymbol{\omega}(\epsilon) = k(\epsilon)\boldsymbol{\omega}_0$  et  $k(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1$  et tel que la surface du tore perturbé tend vers le tore du système non perturbé. Les tores survivants sont nommés les tores KAM. À l'inverse, les tores rationnels sont immédiatement détruits.

Le devenir des tores rationnels est en effet plus complexe, car leur destruction engendre de nouvelles structures. Pour bien visualiser ces structures, il est utile de se ramener à deux degrés de liberté. Les tores sont décrits par deux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Sur une section de Poincaré définie en fixant la valeur de  $\theta_2$ , les tores irrationnels du système intégrable (non perturbé) apparaissent comme une série de cercles concentriques. Sur une tore rationnel, chaque point est vu sur la PSS comme un point fixe de période  $\tilde{q}$ . D'après le *théorème de Poincaré-Birkhoff*, le tore rationnel détruit sous l'effet de la perturbation laisse derrière lui deux orbites, l'une étant stable et l'autre instable. Sur la PSS, on observe donc une alternance, dans le sens de la rotation, de  $\tilde{q}$  points fixes elliptiques et  $\tilde{q}$  points fixes hyperboliques. On dit que les points fixes elliptiques du système perturbé forment une *chaîne d'îlots*.

Le voisinage proche des points elliptiques est, à l'image de la PSS dans son ensemble, formé de cercles concentriques perturbés (l'approximation linéaire y est valide). Le théorème de Poincaré-Birkhoff s'applique localement aux tores rationnels, qui eux-mêmes engendrent des points fixes elliptiques, et ainsi de suite. Rappelons que les tores rationnels du système non perturbé sont denses. Ainsi, de telles structures fractales émergent partout dans l'espace des phases, au voisinage des tores KAM. À cela s'ajoute l'apparition de chaos dans la dynamique, provoquée par la prolifération des points hyperboliques. En deux dimensions, le chaos est contenu entre les tores KAM et reste confiné dans une région restreinte de l'espace des phases. En revanche, en dimension supérieure, les tores KAM ne partitionnent plus l'espace des phases et laissent les zones chaotiques s'étendre dans tout l'espace des phases si on attend suffisamment : c'est la *diffusion d'Arnold* (Guzzo et al., 2004), qui est toutefois très lente.

## Au-delà du régime perturbatif

Le théorème KAM dépeint l'action d'une petite perturbation sur les trajectoires d'un système intégrable. Mais lorsque cette perturbation s'amplifie, de nouveaux phénomènes apparaissent. Pour illustrer ce régime des 'grandes' perturbations, nous allons examiner le cas du *rotateur pulsé*, qui est un système très étudié à la fois pour sa simplicité mathématique et sa phénoménologie complexe. Le mouvement du rotateur pulsé est décrit par le Hamiltonien suivant

$$H = \frac{p^2}{2} + K \cos(\theta) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - mT), \quad (2.23)$$

qui est composé d'une partie cinétique et d'un potentiel périodique en temps. On parle dans ce cas d'un *système pulsé*, car on applique périodiquement une impulsion. Ainsi la période  $T$  mesure la durée entre deux impulsions, le paramètre  $K$  règle l'intensité de l'impulsion et l'entier  $m$  décompte les impulsions. Physiquement, on peut penser à une particule en mouvement dans un anneau et sur laquelle on applique une force de manière périodique, par exemple à l'aide d'un champ électrique. Entre deux impulsions, la quantité de mouvement reste constante. On peut donc suivre l'évolution du système de manière stroboscopique, en se concentrant sur les instants  $mT - \epsilon$  qui précèdent immédiatement les impulsions. À l'instar de la section de Poincaré cette méthode permet de se ramener à une application discrète, en l'occurrence la célèbre application de Chirikov ou *application standard* (Chirikov, 1971).

$$\begin{aligned} p_{m+1} &= p_m + K \sin(\theta_m) \\ \theta_{m+1} &= \theta_m + p_{m+1} T \quad \text{modulo } 2\pi. \end{aligned} \quad (2.24)$$

L'espace des phases associé est de topologie cylindrique, puisque  $\theta$  est un angle. De plus, l'application est périodique en  $p$ , de telle manière que toutes les structures sont contenues dans une cellule de taille  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $p \in [0, 2\pi/T]$ . La Fig. 2.3 présente une cellule de l'espace des phases pour des impulsions d'amplitude croissante. Comme le système ne possède qu'un seul degré de liberté le cas sans perturbation  $K = 0$ , où la quantité de mouvement est conservée, est bien complètement intégrable. Les tores seront rationnels si la trajectoire boucle sur elle-même après un nombre fini de tours et irrationnels dans le cas contraire, soit quand le nombre de rotation

$$R = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2\pi m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \frac{p_i T}{2\pi m}, \quad (2.25)$$

ne peut pas s'écrire comme une fraction. Quand la perturbation reste faible, on retrouve la situation décrite par le théorème KAM avec des tores irrationnels déformés et des tores rationnels remplacés par des résonances. Au-delà, les zones chaotiques ont tendance à s'étendre et les structures régulières à disparaître, si bien que le système est complètement chaotique pour des valeurs de  $K$  suffisamment élevées. Deux mécanismes sont à l'œuvre : la déstabilisation des îlots et la disparition des tores KAM.

La déstabilisation d'un îlot a lieu par une suite de *bifurcations* par doublement de période. À mesure que  $K$  augmente, les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de la matrice de monodromie, situées dans le plan complexe sur le cercle de rayon unité, se rapprochent de l'axe des réels qu'elles coupent en  $-1$ . L'orbite centrale devient alors instable et une nouvelle orbite stable se forme, ayant une période deux fois supérieure. Ce schéma se répète indéfiniment, formant une *cascade de bifurcations* qui mène inexorablement au chaos. Concernant les tores KAM, leur survie dépend directement du nombre de rotation<sup>1</sup>. Il existe une valeur critique  $K_c \approx 0.9716$  de la perturbation au-delà de laquelle tous les tores KAM sont détruits (Ott, 2002; Greene, 1979), ce qui autorise les zones chaotiques à se connecter à l'exception de celles qui sont dans les îlots.

## 2.2 Physique semiclassique

La physique semiclassique est un domaine qui cherche à établir une correspondance entre certaines classes de systèmes quantiques et leurs analogues classiques. La nature intégrable, chaotique ou mixte de la dynamique affecte les propriétés des états quantiques. Ainsi la quantification semiclassique comporte deux volets. La méthode de *quantification EBK*, nommée ainsi d'après Einstein, Brillouin et Keller, et qui concerne les systèmes classiquement intégrables. Mais aussi des méthodes plus générales que l'on regroupe sous le nom de *théorie des orbites périodiques* et qui permettent le traitement des systèmes classiquement chaotiques.

### 2.2.1 Systèmes Hamiltoniens et mécanique quantique

Dans cette section, notre objectif est de montrer comment trouver l'analogie quantique d'un système classique. Pour cela, nous devons d'abord rappeler quelques bases de mécanique quantique. Nous verrons au passage que le formalisme de la mécanique quantique s'appuie fortement sur celui des systèmes classiques Hamiltoniens.

Les objets fondamentaux de la mécanique quantique sont *les états quantiques* et *les observables*. L'état d'un système quantique, noté  $|\Psi\rangle$ , n'est pas représenté par un point de l'espace des phases, comme en mécanique classique, mais par un vecteur défini

---

1. Le nombre de rotation peut être approximé à l'ordre  $n$  par une suite de fractions faisant intervenir  $n$  entiers  $a_0, \dots, a_n$  :  $R \approx 1/(a_0 + (1/a_1 + (1/\dots)))$ . Cette approximation autorise à hiérarchiser les tores du plus rationnel au moins rationnel, ces derniers survivant plus longtemps à la perturbation. Le nombre le plus irrationnel, au sens où tous les entiers  $a_i$  valent 1, est le nombre d'or  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ . Le dernier tore détruit, pour une valeur de la perturbation  $K = K_c$ , a pour nombre de rotation  $R = \varphi T/2\pi$  (Ott, 2002).

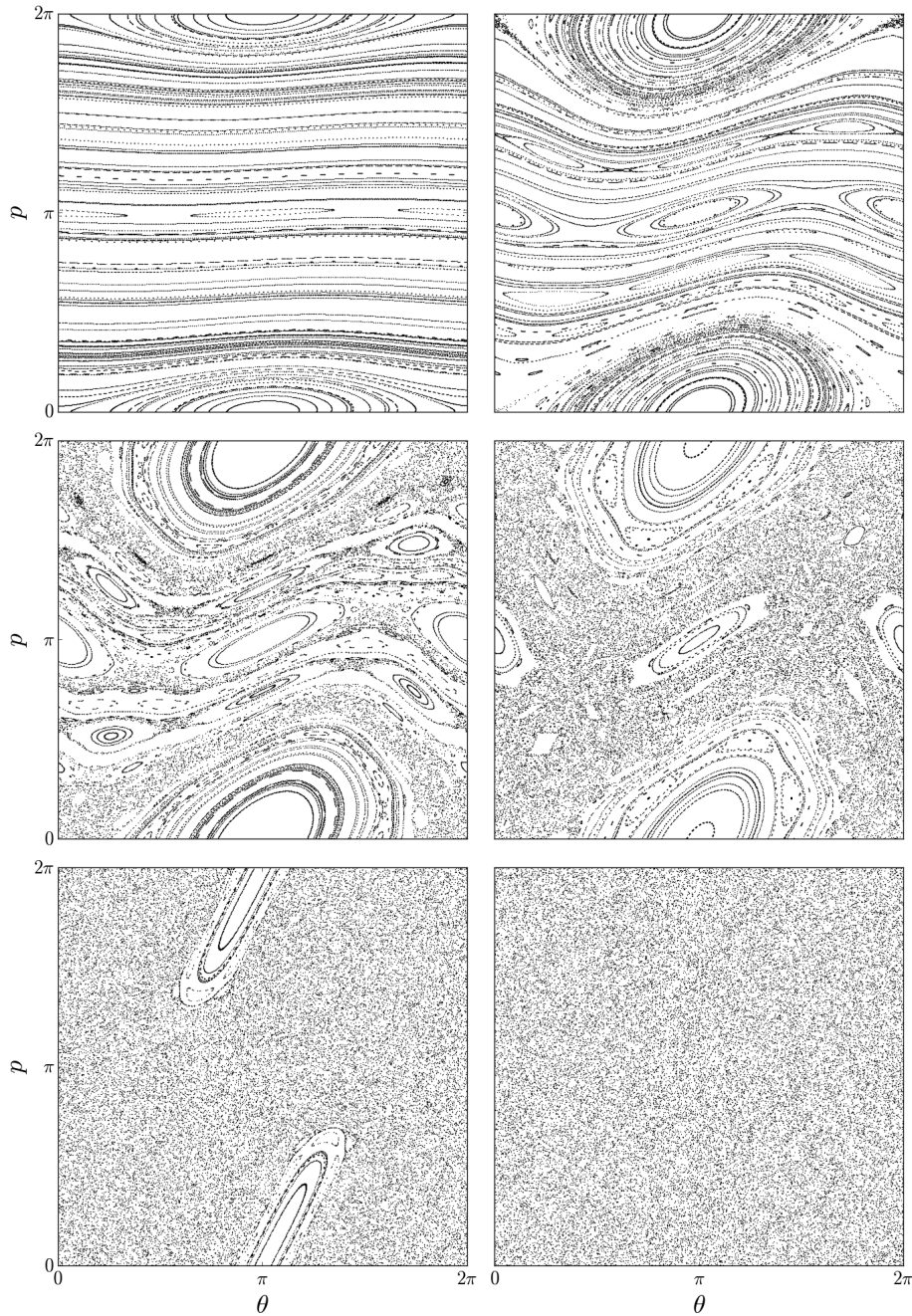


FIGURE 2.3 – Portrait de phase de l'application standard avec  $T = 1$  pour des valeurs croissantes de l'impulsion  $K = 0.1, 0.6, 0.97, 1.3, 4, 10$ . Pour une faible impulsion ( $K = 0.1$ ) on observe deux types de structures : les tores KAM et les îlots qui correspondent respectivement aux tores irrationnels et rationnels du système non perturbé. La résolution est ici trop faible pour apercevoir les zones chaotiques. Ensuite ( $K = 0.6$ ), la déformation des tores KAM devient plus importante et on commence à voir sur l'image de fines bandes chaotiques. À partir de  $K = 0.97$  les tores KAM ont tous disparu. Cela permet aux zones chaotiques de se connecter pour former une mer chaotique autour des îlots ( $K = 1.3$ ). Au-delà, les îlots se déstabilisent. Pour  $K = 4$  il ne reste que l'îlot d'ordre 1 et pour  $K = 10$  le système est complètement chaotique.

dans un espace de Hilbert (Cohen-Tannoudji et al., 1980). Les grandeurs physiques, ou observables, sont représentées par des opérateurs Hermitiens  $\hat{O}$  qui agissent sur les états quantiques. Les résultats possibles d'une mesure, par exemple de la de position, sont ainsi donnés par l'action de l'opérateur position  $\hat{Q}$  sur l'état du système.

Il est en général toujours possible de trouver une base orthonormée d'états propres dans laquelle un opérateur donné est diagonal. Par exemple, pour la position, la base  $\{|q_n\rangle\}$  telle que :

$$\hat{Q}|q_n\rangle = q|q_n\rangle \quad (2.26)$$

Nous pouvons maintenant détailler la procédure de *quantification canonique* pour passer d'un système classique Hamiltonien à son homologue quantique. D'abord, les variables conjuguées  $(p, q)$  deviennent des opérateurs  $\hat{P} = i\hbar\nabla$  et  $\hat{Q} = q$  qui satisfont les relations de commutation canoniques

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = i\hbar, \quad [\hat{P}, \hat{P}] = 0, \quad [\hat{Q}, \hat{Q}] = 0, \quad (2.27)$$

où  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  est le commutateur et  $\hbar$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$ . Deux opérateurs qui ne commutent pas, comme  $\hat{P}$  et  $\hat{Q}$ , ne possèdent pas de base d'états propres communs (on ne peut pas les diagonaliser simultanément). C'est ici le *principe de Heisenberg* qui s'exprime : on ne peut pas connaître en même temps la position et la vitesse d'une particule avec une précision arbitraire.

Si la notion d'état quantique est plutôt abstraite, il est sûrement plus intuitif de raisonner en termes de fonctions d'onde. La fonction d'onde  $\Psi(q)$  donne la probabilité de trouver la particule au point  $q$  (plus précisément, c'est la quantité  $|\Psi(q)|^2$  qui s'interprète comme une densité de probabilité). De la même façon, on définit une fonction d'onde  $\tilde{\Psi}(p)$  qui donne la probabilité que la particule ait une impulsion  $p$ . Formellement, on définit les fonctions d'ondes comme des projections de l'état quantique dans une base de vecteurs propres

$$\Psi(q) = \langle q|\Psi\rangle, \quad \tilde{\Psi}(p) = \langle p|\Psi\rangle. \quad (2.28)$$

Le principe de Heisenberg s'illustre ici aussi, par le fait que ces deux fonctions d'ondes sont reliées par une relation de Fourier. En effet si  $\Psi(\mathbf{x})$  est une fonction piquée, ce qui correspond à une position bien déterminée, alors  $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$  est au contraire une fonction étendue qui correspond à une impulsion mal déterminée. L'évolution temporelle de la fonction d'onde est dictée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \quad (2.29)$$

où  $\hat{H}(\hat{P}, \hat{Q})$  est l'opérateur *Hamiltonien*, qui mesure l'énergie du système. Les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger satisfont

$$\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n, \quad (2.30)$$

où l'ensemble  $\{E_n\}$  représente les niveaux d'énergie du système et  $\{\Psi_n\}$  les fonctions propres du Hamiltonien. Pour conclure cette sous-section, donnons l'exemple du rotateur pulsé, défini classiquement par le Hamiltonien 2.23. Le *rotateur pulsé quantique* s'obtient en remplaçant les variables conjuguées par des opérateurs satisfaisant les relations de commutation 2.27. Cette procédure mène au Hamiltonien quantique suivant

$$\hat{H}(\hat{P}_\theta, \hat{\theta}) = \frac{\hat{P}_\theta^2}{2} - K \cos(\hat{\theta}) \sum \delta(t - nT), \quad (2.31)$$

avec  $\hat{P}_\theta = i\hbar \partial/\partial\theta$ . Le rotateur pulsé quantique est, comme son homologue classique, un système simple mathématiquement mais riche d'enseignements sur la physique. En particulier, il permet d'observer un phénomène voisin de *la localisation d'Anderson* en physique des solides, qui se traduit par la localisation des états en impulsion (Fishman et al., 1982; Moore et al., 1995).

## 2.2.2 Limite semiclassique

Le passage à la limite s'entend le plus souvent comme le fait de réduire une théorie générale (e.g. la relativité) à un ensemble de lois plus restreintes dans leurs applications (la mécanique de Newton) à mesure qu'un paramètre fondamental de la théorie s'annule ou tend vers l'infini (limite des faibles vitesses  $v/c \rightarrow 0$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière). Mais la situation est plus subtile dans le cas de la limite semiclassique<sup>2</sup> et la limite ne s'obtient pas trivialement.

Nous présenterons dans cette section les deux méthodes usuelles pour obtenir la limite semiclassique. D'abord l'approximation WKB de Wentzel, Brillouin et Keller qui est basée sur le formalisme ondulatoire de Schrödinger, puis la méthode de *la phase stationnaire* qui est construite sur le formalisme des intégrales de chemins de Feynman. Nous introduirons finalement *les distributions de Husimi*, qui sont des outils mathématiques permettant une comparaison directe entre les états quantiques et l'espace des phases du système classique.

## Approximation WKB

Quand la longueur d'onde est petite devant l'échelle de variation du milieu traversé, l'onde se comporte localement comme une onde plane. Dans le cas particulier de la mécanique quantique, on résume symboliquement cette condition par la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , à comprendre comme le fait que  $\hbar$  doit être petit devant les quantités du système de même dimension. On cherche donc des solutions de l'équation de Schrödinger de la forme (Landau and Lifshitz, 1981).

$$\psi(q) = A(q) e^{\frac{i}{\hbar} S(q)}. \quad (2.32)$$

Le mouvement s'effectue dans la direction du vecteur d'onde  $\mathbf{k} = \nabla S(q)$ , et les fronts d'onde sont les lignes  $S(q) = \text{cst}$  perpendiculaires au mouvement. En substituant la solution 2.32 dans l'équation de Schrödinger, on obtient, à l'ordre le plus bas en  $\hbar$ , l'équation de Hamilton-Jacobi

---

2. La limite semiclassique se compose en réalité de deux limites :  $\hbar \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow \infty$ . Une première difficulté provient de la nature singulière de la limite  $\hbar \rightarrow 0$  et une complication s'ajoute quand on remarque que ces deux limites ne commutent pas (Berry, 1991).

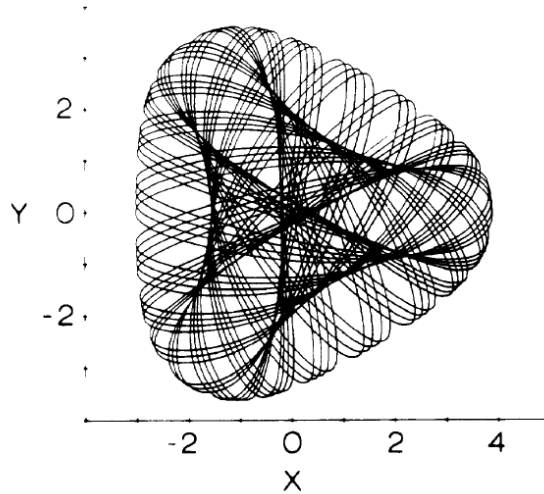


FIGURE 2.4 – Projection d'un tore dans l'espace des positions. Bien que la trajectoire ne se recoupe jamais dans l'espace des phases, on observe de multiples recouvrements dans l'espace des positions ainsi que des lignes caustiques. Figure tirée de (Gutzwiller, 1990).

$$H = -\frac{\partial S(q)}{\partial t}. \quad (2.33)$$

La phase correspond donc à l'action du système classique. L'ordre suivant fait intervenir l'amplitude (Keller, 1985)

$$\frac{\partial}{\partial q}[\dot{q}A^2(q)] = 0, \quad (2.34)$$

qui est une forme particulière de l'équation de Liouville exprimant la conservation de la densité de trajectoires  $A^2(q)$  dans l'espace des phases. L'amplitude peut prendre des valeurs infinies en certains points singuliers. Ce sont les points de contact avec les caustiques. Les caustiques sont des singularités apparentes, au sens où elles sont des artefacts de la projection des trajectoires de l'espace des phases dans l'espace des positions (voir Fig. 2.4). Le passage par une caustique a pourtant un effet concret sur l'onde, qui subit un déphasage de  $-\pi/2$ . Pour tenir compte des déphasages successifs, on introduit dans la phase un terme  $-m\pi/2$ , où  $m$  est l'indice de Maslov.

En pratique, les trajectoires des rayons sont trouvées par résolution de l'équation eikonale, ou relation de dispersion,  $f(\mathbf{k}, \omega) = 0$ . L'équation eikonale peut se mettre sous forme Hamiltonienne, avec  $H = \omega$  (Ott, 2002)

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (2.35)$$

## Phase stationnaire

Le propagateur quantique  $K$  donne l'amplitude de transition d'une position initiale  $q'$  vers une position finale  $q''$  en un temps  $t = t'' - t'$

$$\psi(q'', t'') = \int K(q'', t''; q', t') \psi(q', t') dq'. \quad (2.36)$$

Le propagateur s'exprime comme une intégrale sur tous les chemins continus, mais pas forcément dérivables, qui relient  $q'$  à  $q''$  en un temps  $t$  (Cohen-Tannoudji et al. (1980), annexe JIII)

$$K(q', q'', t) = \int \dots \int D(q(t)) \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt L(\dot{q}, q, t) \right), \quad (2.37)$$

où  $L$  est le lagrangien et  $D(q(t))$  est un "élément de volume" dans l'espace des chemins. Suivant (Gutzwiller, 1990) on définit la *fonction principale de Hamilton*  $R = \int L dt$ , qui a la dimension d'une action. Dans le régime  $R/\hbar \gg 1$ , l'intégrande est une fonction oscillante dont la phase varie rapidement entre deux trajectoires voisines. Ainsi, les contributions à l'intégrale 2.37 s'annulent entre elles, excepté au voisinage des trajectoires stationnaires. D'une manière générale, les contributions principales à toute intégrale de la forme

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda f(t)} dt, \quad (2.38)$$

proviennent des régions où la fonction  $f(t)$  varie lentement, c'est-à-dire  $f'(t) = 0$  où  $f'$  dénote la dérivée. Soit un chemin stationnaire entre  $q'$  et  $q''$  de durée  $t_0$ , en développant au second ordre la fonction  $f(t) \approx f(t_0) + 1/2 f''(t_0)$  on obtient une intégrale de Fresnel, dont le résultat est

$$F(\lambda) \approx \sqrt{\frac{2\pi i}{\det(\lambda) f''(t_0)}} e^{i\lambda f(t_0)}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.39)$$

Soit  $\bar{q}(t)$  un chemin stationnaire. Les trajectoires voisines s'obtiennent par ajout d'un petit déplacement  $\delta q : q(t) = \bar{q}(t) + \delta q(t)$ . Il est bien connu que la condition  $d(\int L dt)/dt = 0$  conduit aux équations d'Euler-Lagrange de la mécanique classique. Ainsi les chemins stationnaires correspondent aux trajectoires du système classique. Il reste alors, comme dans l'exemple formel ci-dessus, à développer  $R$  au second ordre en  $\delta q$  et à évaluer l'intégrale de Fresnel. Le propagateur classique s'obtient finalement en sommant les contributions de chaque trajectoire classique.

$$K_{sc}(q'', t''; q', t') = \sum_{\substack{\text{trajectoires} \\ \text{classiques}}} (2\pi\hbar)^{-N/2} \left| -\frac{\partial^2 R}{\partial q'' \partial q'} \right|^{1/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar} R(q'', t''; q', t')\right]. \quad (2.40)$$

Ce résultat correspond au propagateur semiclassique, trouvé par Van Vleck en 1928 (Gutzwiller, 1990).

## Comparaison avec les systèmes quantiques

La comparaison entre un système quantique et son analogue classique nécessite de pouvoir représenter un état quantique à la fois en position et en moment. En 1932,



Eugène Wigner (Wigner, 1932) construit, à partir de la fonction d'onde, une fonction  $\Psi_W(p, q)$  qu'il interprète comme une distribution de probabilité dans l'espace des phases

$$\Psi_W(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq' \exp\left(-\frac{i}{\hbar}pq'\right) \Psi(q - q'/2) \Psi^*(q + q'/2). \quad (2.41)$$

La *distribution de Wigner* est effectivement une avancée utile pour étudier la correspondance quantique classique ; toutefois elle ne peut pas s'interpréter comme une probabilité car elle prend parfois des valeurs négatives, on parle donc plutôt de *quasi-probabilité*. Pour résoudre ce problème, une distribution de Wigner lissée ('coarse-grained' en anglais) par un état 'bien choisi' a été proposée (Husimi, 1940). Les états en question, appelés *états cohérents*  $|\alpha\rangle$ , ont une propriété remarquable. En effet, leurs fonctions d'ondes en position et en moment sont des Gaussiennes de largeurs respectives  $\Delta q$  et  $\Delta p$  telles que  $\Delta q \Delta p = \hbar/2$  (Chang and Shi, 1986). En un sens, ce sont des états d'incertitude minimale. La *distribution de Husimi* est définie comme la projection  $|\langle \Psi | \alpha \rangle|^2$  de l'état quantique que l'on souhaite visualiser sur un état cohérent. Ce qui donne (Gutzwiller, 1990)

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dp' dq' \Psi(p', q') \exp\left(-\frac{(q - q')^2}{\hbar\Delta q^2} - \Delta q^2 \frac{(p - p')^2}{\hbar}\right). \quad (2.42)$$

Le paramètre  $\Delta q$  étant ajustable afin de privilégier au choix la précision sur la position ou sur le moment. La distribution de Husimi est toujours positive et s'interprète bien comme une probabilité. Nous l'avons présentée comme un lissage de la fonction de Wigner. Pour comprendre cette affirmation, introduisons une seconde distribution de Wigner  $\Phi_W(p, q)$  et regardons l'intégrale suivante

$$\int dp dq \Psi_W(p, q) \Phi_W(p, q). \quad (2.43)$$

En introduisant suivant Chang and Shi (1986) les variables  $\xi = q + q'/2$  et  $\eta = q - q'/2$ , l'intégrale devient

$$\int d\xi d\eta \langle \Psi | \xi \rangle \langle \xi | \Phi \rangle \langle \Phi | \eta \rangle \langle \eta | \Psi \rangle = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2, \quad (2.44)$$

et on retrouve la distribution de Husimi si on fait le choix  $|\Phi\rangle = |\alpha\rangle$ .

## Systèmes mixtes

Deux classes de systèmes sont particulièrement étudiées en physique semiclassique. Les billards dynamiques, définis par un point matériel dans une domaine fermé, avec un rebond spéculaire à la surface. Et aussi les applications pulsées que nous avons déjà rencontrées avec l'exemple du rotateur pulsé. La forme du billard détermine directement la nature de la dynamique. Il existe toute une zoologie de billards aux propriétés dynamiques bien définies. On peut citer les billards circulaires ou elliptiques qui sont pleinement intégrable, le billard en forme de stade, qui est chaotique avec une famille de trajectoires régulières (appelées 'bouncing balls orbits'), ou les billards en forme de champignons où les trajectoires régulières et chaotiques coexistent. Certains billards

continûment déformables, comme les billards en limaçon (Dullin and Bäcker, 2001; Bäcker et al., 2004), offrent la possibilité de suivre la transition depuis le régime intégrable vers le régime mixte.

En 1973 Percival s'intéressait aux systèmes quantiques dont la limite classique donnait un système dynamique de nature mixte, avec à la fois des zones intégrables et chaotiques. Il sépara les états en deux catégories, *les états réguliers* et *les états irréguliers* (Percival, 1973), et considéra que les modes réguliers et irréguliers formaient des spectres indépendants. Dans le prolongement de cette idée, Berry et Robnik conjecturent en 1984 (Berry and Robnik, 1984) que le spectre est une superposition de séquences de niveaux statistiquement indépendantes associée aux structures de l'espace des phases révélées par l'étude du système classique.

Du point de vue dimensionnel, la constante  $\hbar$  est équivalente à une action (on l'appelle d'ailleurs le *quantum d'action*), ce qui fait de  $\hbar^N$  une unité de volume dans l'espace des phases. L'incertitude associée à l'inégalité de Heisenberg se traduit ainsi par un étalement des états quantiques dans l'espace des phases, par opposition aux états classiques ponctuels. L'intérêt des distributions de Wigner et Husimi apparaît d'autant plus clairement lorsque l'on s'autorise à faire varier  $\hbar$ , car alors on peut observer le comportement des états quantiques à mesure que l'on se rapproche du cas classique. En particulier, il devient possible de vérifier si le régime décrit par Berry et Robnik est atteint quand  $\hbar \rightarrow 0$ , ce qui correspondrait à des distributions de Husimi localisées dans des zones dynamiquement indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire séparées par une courbe invariante. La Fig. 2.5 montre différents états du rotateur pulsé quantique projetés dans l'espace des phases. Une comparaison avec la Fig. 2.3 suffit à vérifier que les états se concentrent effectivement sur les différentes structures intégrables ou bien sur la mer chaotique.

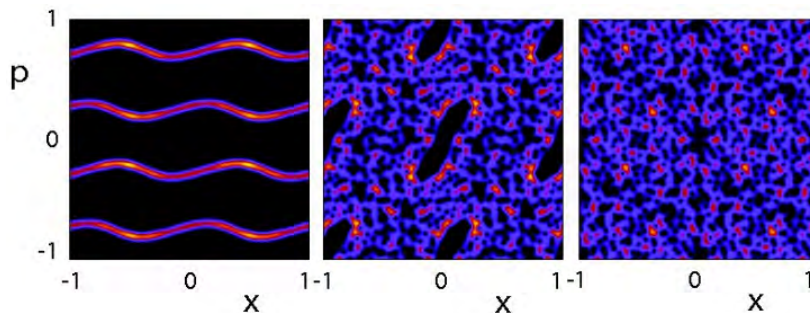


FIGURE 2.5 – Distributions de Husimi du rotateur pulsé quantique pour différentes valeurs du paramètre  $K$ , qui règle la force de l'impulsion (valeurs croissantes de gauche à droite). Les états sont localisés sur des régions bien définies de l'espace des phases, soit intégrables soit chaotiques. De gauche à droite, on reconnaît la séparatrice de l'îlot principal, une zone chaotique avec des îlots encore présents et une zone chaotique sans îlots. Figure tirée de Ullmo and Tomsovic (2014).

### 2.2.3 Intégrabilité et chaos en physique quantique

Nous venons de voir que dans les systèmes classiquement mixtes les états quantiques se construisent soit sur les tores des régions intégrables, soit sur la mer chaotique. Le fait que les états quantiques sont localisés dans des zones dynamiquement indépendantes a d'importantes répercussions sur leurs *propriétés spectrales*. Dans le cas classiquement intégrable les spectres suivent génériquement une distribution de Poisson, comme le proposèrent [Berry and Tabor \(1977\)](#). Quant aux spectres chaotiques, leur distribution est modélisée par les valeurs propres des *matrices aléatoires* (ensembles statistiques présentés dans la section [2.2.4](#)), en accord avec la conjecture de Bohigas, Giannoni et Schmit ([Bohigas et al., 1984](#)).

Notons que de nombreux systèmes, comme les chaînes de spin, n'admettent pas d'analogues classiques. Là encore, les statistiques observées sur les niveaux d'énergie des systèmes complexes (en interaction ou ayant de nombreux degrés de liberté) reproduisent de manière quasi-universelle les distributions des matrices aléatoires ([Kollath et al., 2010](#); [Kos et al., 2018](#)). Ces éléments tendent à montrer qu'il existe bien un équivalent quantique aux notions d'intégrabilité et de chaos, bien qu'il soit difficile d'en formuler une définition satisfaisante ([Caux and Mossel, 2011](#)).

Dans cette section, nous allons passer en revue les méthodes de la physique semiclassique. Nous aborderons d'abord les règles de quantification des systèmes classiquement intégrables. Puis nous introduirons les concepts fondamentaux du chaos quantique, qui seront mis en application dans le chapitre [5](#). Nous procéderons en trois temps : nous présenterons *la formule des traces* qui relie la densité spectrale aux orbites périodiques du système classique, puis nous présenterons les propriétés spectrales universelles des systèmes classiquement chaotiques et enfin nous discuterons cette notion d'universalité.

### Quantification des systèmes intégrables

Les vieilles règles de quantifications de Bohr-Sommerfeld, qui permirent notamment de retrouver les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, étaient à l'origine purement ad hoc. La formulation ondulatoire de la mécanique quantique, et plus précisément l'approximation WKB présentée dans la section [2.2.2](#), a fourni un socle théorique pour expliquer ces règles de quantification et a permis de les étendre aux systèmes non séparables. Dans l'espace des positions, les trajectoires classiques qui évoluent sur des tores se recoupent plusieurs fois, comme illustré sur la Fig. [2.4](#). Entre deux passages successifs au même point, la phase  $S(q)$  s'accumule le long de la trajectoire et la fonction d'onde  $\Psi(q)$  doit s'écrire comme une somme

$$\Psi(q) = \sum_j A_j(q) e^{\frac{i}{\hbar} S_j(q)}, \quad (2.45)$$

où  $j$  compte le nombre de passages de la trajectoire classique. Pour que la fonction d'onde soit univaluée, il faut imposer un critère de résonance sur la phase et une condition sur l'amplitude ([Keller, 1985](#)). Cela conduit aux *règles de quantification EBK*

$$\int_{\gamma_j} p_j dq_j = 2\pi\hbar \left( n_j + \frac{m_j}{4} \right), \quad (2.46)$$

du nom des principaux contributeurs Einstein, Brillouin et Keller, avec  $\gamma_j$  les différents chemins irréductibles du tore.

## Systèmes chaotiques : la formule des traces

Dans un article de 1917, Einstein montre que les règles de quantification de Bohr-Sommerfeld nécessitent la présence de tores invariants dans l'espace des phases du système classique (Stone, 2005). Il note que les systèmes chaotiques, qui sont courants dans la nature, ne possèdent pas ces structures invariantes. On peut comprendre en quoi cela pose problème à la lumière de la méthode de quantification exposée dans la section précédente. Si les trajectoires sont ergodiques, elles se recoupent une infinité de fois en chaque point de l'espace des positions et il n'est plus possible d'écrire la fonction d'onde comme une somme finie. Bien que les limitations de la méthode de quantification EBK étaient connues très tôt, le sujet ne ressurgit qu'au début des années 1970 sous l'impulsion de M. Gutzwiller. Ce dernier introduisit une méthode de quantification des systèmes classiquement chaotiques basée sur la désormais célèbre *formule des traces* (Gutzwiller, 1971).

Comme toute formule semiclassique, la formule des traces est de la forme  $f(E_j) = g(I_j)$ , où  $f$  et  $g$  sont respectivement des fonctions des niveaux d'énergies du système quantique et des actions du système classique. Du côté classique, la formule fait intervenir les orbites périodiques du système. Dans les zones ergodiques les orbites périodiques sont les seules structures invariantes avec la surface d'énergie. Toutes ces orbites périodiques sont instables, leur instabilité reflétant la divergence des orbites voisines. Avant de présenter la formule, il est utile d'introduire quelques observables utilisées dans la description des spectres.

Les niveaux d'énergie en dessous d'une énergie  $E$  sont dénombrés par la *fonction de comptage*

$$N(E) = \sum_n \Theta(E - E_n), \quad (2.47)$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heaviside qui vaut 0 si  $E < E_n$  et 1 si  $E \geq E_n$ . À partir de  $N(E)$ , on définit par ailleurs la *densité spectrale*

$$d(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \sum_n \delta(E - E_n), \quad (2.48)$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac. Il est habituel de séparer la fonction de comptage en une partie moyennée  $\bar{N}$ , qui s'obtient par une moyenne locale autour de l'énergie cible  $E$ , et une partie fluctuante (ou oscillante)  $N^{osc}$

$$N(E) = \bar{N}(E) + N^{osc}(E). \quad (2.49)$$

De la même façon, la densité spectrale se décompose en une partie moyennée et une partie oscillante

$$d(E) = \bar{d}(E) + d^{osc}(E). \quad (2.50)$$

Ces deux termes correspondent à des contributions physiques bien distinctes. L'évolution moyennée du nombre de niveaux avec l'énergie est évaluée, au premier ordre,

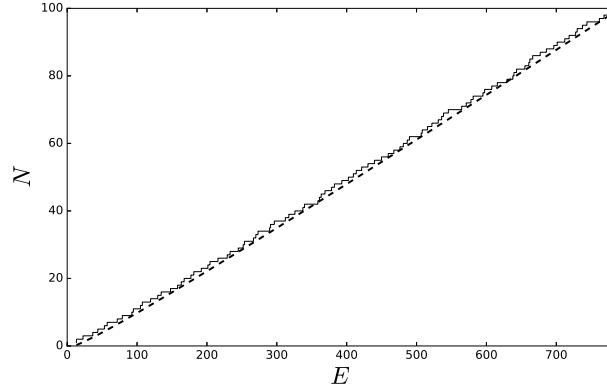


FIGURE 2.6 – Comparaison, pour le billard en forme de stade, entre la fonction  $N(E)$  qui compte les niveaux en-dessous d’une énergie  $E$ , ici en unité arbitraire, et le terme de Weyl  $\bar{N}(E)$ .  $N(E)$  est représenté en trait plein et  $\bar{N}(E)$  en trait tireté.

en considérant que chaque état quantique occupe une cellule de l’espace des phases de volume  $2\pi\hbar^N$ . Ainsi la partie moyennée correspond à la distribution de Thomas-Fermi (Gutzwiller, 1990).

$$\bar{N}(E) \approx \frac{1}{2\pi\hbar^N} \int d^N p d^N q \Theta(E - H(\mathbf{p}, \mathbf{q})). \quad (2.51)$$

Dans le cas spécifique des billards bidimensionnels,  $\bar{N}$  est donné au premier ordre par le terme de Weyl<sup>3</sup>  $\bar{N}(E) \approx AE$ , où  $A$  est la surface du billard. Le développement au second ordre fait intervenir la frontière  $\mathcal{D}$  du domaine fermé. On constate que le terme de Weyl ne renseigne aucunement sur la dynamique. En effet, deux billards ayant les mêmes aires et périmètres sont indistinguishables en ne regardant que le terme de Weyl. Pourtant, si leurs formes sont différentes, la dynamique peut très bien être, à l’extrême, complètement intégrable dans le premier billard et complètement chaotique dans l’autre. Les effets liés à la dynamique sont en fait contenus dans la partie oscillante de la fonction de comptage (ou de la densité spectrale).

Nous pouvons maintenant présenter la formule des traces. Celle-ci relie la densité spectrale au système classique via les actions des orbites périodiques et s’exprime comme

$$d(E) - \bar{d}(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \sum_j \sum_r \frac{T_j}{\sqrt{\det(M^r - I)}} \cos \left[ r \left( \frac{S_j}{\hbar} - \kappa_j \pi/2 \right) \right]. \quad (2.52)$$

La double somme concerne les trajectoires périodiques (instables, s’il y a du chaos) du système. On note  $\gamma_j$  les orbites périodiques primitives qui s’arrêtent au point où la trajectoire boucle sur elle-même. Le nombre de répétitions d’une même orbite primitive est noté  $r$ . La phase s’exprime en fonction de l’action  $S_j = \oint_{\gamma_j} \mathbf{p} d\mathbf{q}$  et le déphasage dû au passage de la trajectoire par une caustique est pris en compte via l’indice de Maslov

3. La motivation de Weyl était de prouver la conjecture de Lorentz, selon laquelle le nombre de fréquences propres d’une membrane dans un intervalle  $[\nu, \nu + \delta\nu]$  ne dépend pas de la forme de la membrane mais seulement de son aire (Kac, 1966)

$\kappa_j$ . Pour finir, le terme assimilable à une amplitude devant le cosinus contient la période temporelle  $T_j$  de l'orbite  $\gamma_j$  et la matrice de monodromie  $M$  (voir section 2.1.1) qui mesure l'instabilité de l'orbite complète  $r\gamma_j$ . À chaque orbite périodique correspond une fonction oscillante de l'énergie. Les contributions des différentes orbites interfèrent entre-elles, de sorte qu'en sommant suffisamment de contributions on reconstitue les pics de la densité.

Une dérivation détaillée de la formule des traces est présentée dans (Gutzwiller, 1990). Nous allons maintenant présenter succinctement les étapes importantes de cette dérivation. Pour autant, le découpage et l'ordre des étapes ne suivra pas exactement l'organisation choisie par l'auteur (nous préférons suivre le déroulement de l'annexe A de la publication II, où nous adaptons la formule des traces au cas des oscillations acoustiques.)

Nous commençons par chercher une expression de la fonction de Green  $G(q, q', E)$ , qui est une solution de l'équation de Schrödinger inhomogène

$$\hat{H}G(q, q', E) - EG(q, q', E) = \delta(q - q'), \quad (2.53)$$

où  $\hat{H}$  est l'opérateur Hamiltonien. Soit  $\{\phi_n\}$  une base de fonctions propres du Hamiltonien, alors il est bien connu que la fonction de Green est reliée aux fonctions propres de cette base par

$$G(q, q', E) = \sum_j \frac{\phi_j^*(q')\phi_j(q)}{E - E_j}. \quad (2.54)$$

Nous cherchons ensuite une expression du propagateur  $K(q, q', t)$  dans la limite semiclassique. Nous avons déjà exposé la méthode standard pour obtenir le propagateur semiclassique dans la section 2.2.2. En appliquant la méthode de la phase stationnaire décrite dans la section 2.2.2, on sélectionne uniquement les trajectoires classiques. On obtient ainsi l'Éq. 2.40, que nous répétons ici

$$K_{sc}(q'', t''; q', t') = \sum_{\substack{\text{trajectoires} \\ \text{classiques}}} (2\pi\hbar)^{-N/2} \left| -\frac{\partial^2 R}{\partial q'' \partial q'} \right|^{1/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar} R(q'', t''; q', t')\right].$$

Mathématiquement,  $K(q, q', t)$  est une fonction de Green dépendante du temps, reliée à la fonction de Green en énergie  $G(q, q', E)$  par une relation de Fourier

$$G(q, q', E) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty K(q, q', t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} Et\right) dt. \quad (2.55)$$

Dans la limite  $E/\hbar \rightarrow 0$ , on peut donc poser l'égalité suivante

$$\sum_j \frac{\phi_j^*(q')\phi_j(q)}{E - E_j} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty K_{SC}(q, q', t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} Et\right) dt, \quad (2.56)$$

avec  $K_{sc}(q, q', t)$  donné par l'Éq. 2.40.

Le terme de droite de l'Éq. 2.56 est de la forme  $\int \exp(i\phi)$  où la phase correspond à l'action classique  $\phi = R(q, q', t) + Et = S(q, q', E)$ . On cherche parmi les chemins qui vont du point  $q'$  au point  $q$ , ceux qui rendent l'action  $S(q, q', E)$  stationnaire. Une fois encore, on développe la phase au second ordre puis on applique la formule de Fresnel, Éq. 2.39. Les termes du second ordre font apparaître un déterminant devant l'exponentielle qui se combine avec le préfacteur de l'Éq. 2.40. On obtient

$$G_{sc}(q, q', E) = \sum_j \frac{1}{i\hbar^{N+1}} \left( \frac{1}{\dot{q}\dot{q}'} \left| -\frac{\partial^2 S}{\partial q_\perp \partial q'_\perp} \right| \right)^{1/2} \exp \left( \frac{i}{\hbar} S(q, q', E) - i\kappa \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.57)$$

où  $\dot{q}'$  et  $\dot{q}$  correspondent aux vitesses initiales et finales et où les dérivées secondes sont calculées dans les directions transverses au sens du mouvement.

Considérons les deux membres de l'Éq. 2.56. La trace du membre de gauche (Éq. 2.54) s'exprime formellement comme

$$\int d^d q G(q, q, E) = \sum_j \frac{1}{E - E_j}. \quad (2.58)$$

Pour donner un sens à cette expression, on ajoute une partie imaginaire au dénominateur que l'on fait tendre vers 0. Dans cette limite, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E - E_j + i\epsilon} = \mathcal{P} \left( \frac{1}{E - E_j} \right) - i\pi \delta(E - E_j), \quad (2.59)$$

où  $\mathcal{P}$  correspond à la valeur principale de Cauchy. Il ne reste donc plus qu'à prendre la partie imaginaire pour obtenir la densité d'états

$$\text{Im}(\text{Tr} G(q, q', E)) = -\pi \sum_j \delta(E - E_j). \quad (2.60)$$

Concernant le membre de droite, Éq. 2.57, le calcul de la trace demande plus d'efforts. La trace  $\int dq G_{sc}(q, q', E)$  est de nouveau une intégrale de la forme  $\int \exp(i\phi)$ , qui fait intervenir une somme sur les chemins classiques fermés satisfaisant  $q' = q$ . Pour évaluer cette intégrale, on applique une troisième fois la méthode de la phase stationnaire. Une nouvelle fois, cela revient à sélectionner seulement certaines orbites, en l'occurrence celles qui satisfont la condition  $(\frac{\partial S(q, q', E)}{\partial q'} + \frac{\partial S(q, q', E)}{\partial q})|_{q=q'} = 0$ . Les orbites sélectionnées ont une vitesse finale, après une période, égale à leur vitesse initiale : ce sont *les orbites périodiques*. En combinant une dernière fois les déterminants, on obtient

$$\text{Tr} G_{sc}(q, q', E) = \frac{1}{i\hbar} \sum_j \frac{T_j}{|\det(M_j - I)|^{1/2}} \exp(S_j(E) - i\kappa'_j \pi/2), \quad (2.61)$$

où  $T_j = \int dq/\dot{q}$  est la période temporelle et  $M_j$  est la matrice de monodromie. En prenant la partie imaginaire, on obtient la formule finale qui relie la densité spectrale à la somme sur les orbites périodiques du système classique

$$d(E) = \bar{d}(E) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \sum_j \frac{T_j}{|\det(M_j - I)|^{1/2}} \exp(S_j(E) - i\kappa'_j \pi/2). \quad (2.62)$$

La densité spectrale est séparée en une partie moyennée et une partie oscillante. Le terme de Weyl  $\bar{d}(E)$  est issu de la contribution des orbites de longueur nulle (Gutzwiller, 1990). La partie oscillante de la densité spectrale correspond à la somme sur toutes les orbites de longueur finie.

### Application : longueurs des orbites périodiques dans un billard.

Après avoir présenté la formule des traces ainsi que sa dérivation, voyons une application concrète. Dans un billard, l'action d'une trajectoire  $\gamma_j$  s'obtient par le produit de son vecteur d'onde  $k_j = \sqrt{E}/\hbar$  par sa longueur géométrique  $l_j$ . Il est usuel de réécrire la formule des traces avec une densité spectrale  $d(k) = \sum_j \delta(k - k_j)$  et une amplitude qui dépend de la longueur géométrique des orbites  $A_j(l_j)$ . Pour exploiter numériquement la formule des traces, il faut donner une largeur finie aux pics de la densité. Une manière de procéder, tirée de Bogomolny et al. (1997), est de ré-écrire la formule des traces comme une relation entre deux fonctions  $h$  et  $g$  qui sont reliées entre-elles par une transformée de Fourier.

$$\sum_j h(k_j) = \sum_j A_j(l_j) g(l_j). \quad (2.63)$$

Le terme de gauche  $h(k, k_j)$  correspond à la densité spectrale convolué par exemple par une Gaussienne de largeur  $\alpha$ . Le terme de droite est l'amplitude  $A_j$ , qui contient de l'information sur la longueur  $L_j$  et la stabilité des orbites, multipliée par une enveloppe Gaussienne. La largeur des pics Gaussiens et de l'enveloppe Gaussienne sont inversement proportionnelles. Cela signifie que plus on entre de termes dans la somme classique, et meilleure sera la résolution sur les niveaux d'énergie. L'utilisation la plus directe de cette formule consiste à retrouver la densité spectrale, approximée par la fonction  $h$ , à partir des longueurs  $l_j$  des orbites périodiques  $\gamma_j$ . La difficulté numérique vient du fait que la somme sur les orbites périodiques demande un nombre exponentiel de calculs, du fait de la prolifération des orbites (voir section 2.1.3). Pour palier cette difficulté il faut tronquer la somme classique par l'intermédiaire de l'enveloppe Gaussienne, ce qui revient à fixer la résolution des niveaux d'énergie (le paramètre  $\alpha$ ).

On peut voir la formule des traces à l'œuvre en inversant la relation 2.63. En effet, la transformée de Fourier des fluctuations de densité  $d(k) - \bar{d}(k)$  produit un pic pour chaque orbite périodique du système classique, à la position  $l = l_j$  correspondant à la longueur géométrique des orbites les moins instables. En utilisant les 4000 premiers niveaux d'énergie du stade de Bunimovitch (données fournies par Ignacio Garcia-Mata), nous retrouvons en effet les premières orbites périodiques (Fig. 2.7). Le premier pic, positionné en  $l = 2a = 2$  reflète la présence des *bouncing balls*, ces trajectoires qui rebondissent entre les côtés opposés du stade.



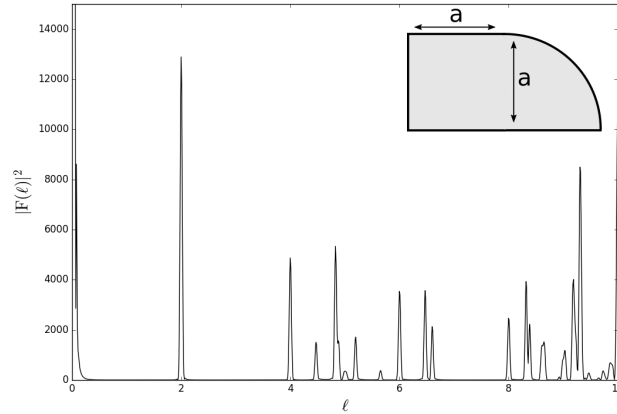


FIGURE 2.7 – Spectre de puissance des niveaux d'énergie du billard en forme de stade de Bunimovitch.  $F(\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik\ell) d(k) w(k) dk$ , où  $k = \sqrt{E}$  et  $w(k)$  est une fenêtre Gaussienne (Blümel et al., 1996). Chaque pic correspond à une orbite périodique.

### 2.2.4 Propriétés statistiques des spectres quantiques

La première étape de l'analyse du spectre est la *rectification* (en anglais *unfolding*). Cette opération consiste à remplacer les niveaux d'énergie  $E_n$  par des niveaux rectifiés  $x_n$

$$x_n = \bar{N}(E_n), \quad (2.64)$$

afin d'imposer une densité  $\bar{d} = 1$ . La rectification facilite la comparaison entre les spectres, qui ne diffèrent plus que par leurs fluctuations autour des quantités moyennées. Les propriétés statistiques sont décrites par la fonction de corrélation à  $n$  points

$$R_n(x_1, \dots, x_N) = \frac{N!}{(N-n)!} \int dx_{n+1} \dots dx_N P_N(x_1, \dots, x_N), \quad (2.65)$$

où  $N$  est le nombre total de niveaux d'énergie et  $P_N$  est la probabilité d'avoir un point à la position  $x_j$  dans chaque intervalle  $[x_j, x_j + dx_j]$  avec  $j = 1, \dots, N$ . Pour étudier les corrélations à courte distance, il est courant d'utiliser la distribution des écarts entre niveaux proches voisins  $P(s)$ , qui correspond à la probabilité pour un écart  $s_n = x_{n+1} - x_n$  d'appartenir à l'intervalle  $[s, s + ds]$ . Dans le cas où le spectre est difficile à rectifier, ce qui arrive typiquement si  $\bar{N}(E)$  est mal connu, on utilise à la place la distribution des ratios entre les écarts consécutifs  $P(r)$ , où  $r_n = (E_{n+1} - E_n)/(E_n - E_{n-1})$  (Oganesyan and Huse, 2007; Atas et al., 2013).

De nombreuses observables statistiques dépendent de la longueur  $L$  de l'intervalle considéré, et sondent ainsi la structure du spectre aux échelles plus larges. On mentionnera la *rigidité spectrale*, ou statistique de Dyson-Mehta  $\Delta(L)$ . La rigidité spectrale se définit comme la déviation, au sens des moindres carrés, de la fonction de comptage  $N(x)$  par rapport au meilleur fit linéaire de cette même fonction dans l'intervalle considéré.

La statistique de Poisson constitue le cas limite des spectres sans corrélation. Une manière de converger vers un spectre Poissonien consiste à ajouter ensemble plusieurs spectres indépendants. Sur la base de cette observation, [Berry and Tabor \(1977\)](#) montrent que les spectres des systèmes intégrables doivent suivre la statistique de Poisson. En effet, les spectres intégrables se subdivisent en sous spectres indépendants associés chacun à un tore de l'espace des phases. Pour les spectres Poissoniens, c'est-à-dire sans corrélations, la distribution des proches voisins est donnée par

$$P(s) = e^{-s}, \quad (2.66)$$

et la rigidité spectrale par

$$\bar{\Delta} = L/15. \quad (2.67)$$

En 1955, Wigner suggère le caractère universel des spectres des systèmes quantiques complexes, tels que les noyaux atomiques lourds ([Wigner, 1932](#); [Joyner et al., 2014](#)). Cette hypothèse s'appuie sur l'analogie avec les systèmes classiques possédant de nombreux degrés de liberté, comme les gaz, qui sont traités avec des outils statistiques. Wigner va plus loin en suggérant une connexion entre systèmes complexes et matrices aléatoires :

*The Hamiltonian which governs the behavior of a complicated system is a random symmetric matrix, with no particular properties except for its symmetric nature.*

Les matrices aléatoires dont il est question sont les ensembles Gaussiens de Wigner et Dyson. Ce sont des matrices à coefficients distribués aléatoirement suivant une loi Gaussienne. Elles correspondent à trois ensembles statistiques :

*Gaussian Orthogonal Ensemble* (GOE) : matrices symétriques à coefficients réels et invariantes sous l'effet des rotations, modélisent les systèmes symétriques par renversement du temps.

*Gaussian Unitary Ensemble* (GUE) : matrices hermitiennes à coefficients complexes, modélisent les systèmes qui ne sont pas invariants par renversement du temps.

*Gaussian Symplectic Ensemble* : les coefficients sont des quaternions, les matrices modélisent les systèmes invariants par renversement du temps et de spin demi-entier.

La structure des spectres RMT (de l'anglais 'Random Matrix Theory') est radicalement différente du cas Poissonien. La Fig. 2.8 met en évidence une différence fondamentale entre les spectre RMT et Poissoniens. Dans le cas des spectres Poissoniens, la distribution est une exponentielle décroissante, trahissant le fait que le système possède beaucoup de niveaux quasi-dégénérés. Par opposition, on observe dans les spectre RMT le phénomène de *répulsion de niveaux*, qui se manifeste par l'annulation de la distribution  $P(s)$  dans la limite des petits écarts. La distribution RMT s'annule aussi à l'infini plus vite que la distribution de Poisson, elle a une forme en cloche concentrée

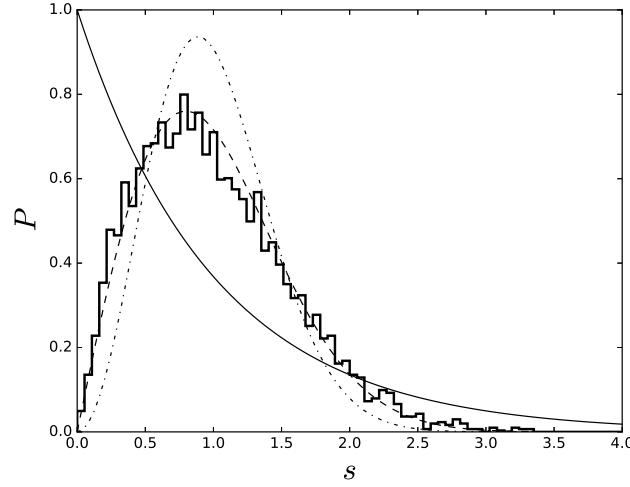


FIGURE 2.8 – Distribution des proches voisins. La ligne pleine correspond à la statistique de Poisson, la ligne tiretée à GOE et la ligne en pointillés tiretés à GUE. Par comparaison, nous avons calculé la distribution des proches voisins sur le spectre numérique du billard en forme de stade, qui est représentée en trait plein épais. Le spectre numérique utilisé est composé de plus de 5000 niveaux d'énergie et l'histogramme est construit avec 75 bins égaux sur l'intervalle  $[0, 4]$ .

autour d'une valeur moyenne ( $s = 1$  pour GOE), on constate ainsi que les spectres RMT sont 'rigides', au sens où les écarts entre niveaux consécutifs varient peu. L'hypothèse de Wigner peut maintenant se définir plus précisément : les valeurs propres des matrices aléatoires (ensembles GOE, GUE et GSE) ont les mêmes propriétés statistiques que les spectres des systèmes complexes. Les données expérimentales appuient fortement cette conjecture (Bohigas, 1991). Par exemple, un très bon accord est obtenu avec la statistique prédite par GOE en rassemblant des données sur un grand nombre de spectres nucléaires indépendants (Haq et al., 1982). L'agrégation de spectres indépendants est nécessaire en pratique pour atteindre une puissance statistique significative.

Pour finir, voici quelques expressions prédites par la RMT. Nous allons nous concentrer sur l'ensemble GOE, qui est le plus pertinent dans le cadre de cette thèse (voir section 3.3.4). Une expression approchée de la distribution des proches voisins, connue sous le nom de conjecture de Wigner (*Wigner surmise* en anglais), est donnée par

$$P_{GOE}(s) = \frac{\pi s}{2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4}\right). \quad (2.68)$$

Nous avons déjà commenté la courbe correspondante, qui est représentée sur la Fig. 2.8. La rigidité spectrale est donnée par

$$\Delta_{GOE}(L) = \frac{\ln L}{\pi^2} + E. \quad (2.69)$$

La fonction de corrélations à deux points  $R_2(x)$  permet d'étudier les corrélations à la fois à petite et grande échelle. Elle s'exprime, pour des petites valeurs de  $x$ , comme

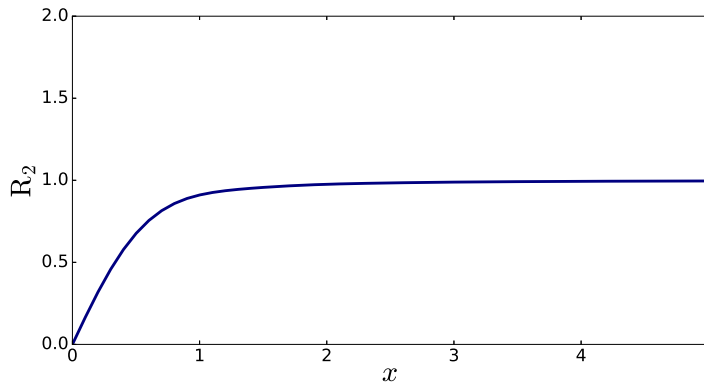


FIGURE 2.9 – Fonction de corrélations à deux points  $R_2(x)$  prédite par GOE.

$$R_2(x) = \bar{d}^2(1 - Y_2(x)),$$

$$Y_2(x) = s^2(x) - \left( \text{Si}(\pi x) - \frac{1}{2}\pi x \right) \left( \frac{\cos(\pi x)}{\pi x} - \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)^2} \right), \quad (2.70)$$

où  $\text{Si}(x) = \int_0^x [(\sin y)/y]dy$ . La courbe correspondante est tracée sur la Fig. 2.9. On remarque qu'aux plus petites valeurs, inférieures à l'écart moyen entre niveaux  $\langle x \rangle$ , les corrélations sont d'abord nulles puis augmentent à peu près linéairement jusqu'à atteindre un plateau en  $x = \langle x \rangle$ . La hauteur du plateau vaut  $\bar{d}^2 = 1$  par construction.

### 2.2.5 Universalité dans les systèmes chaotiques

Bohigas et al. (1984) montrent que l'utilité des matrices aléatoires ne s'arrête pas aux systèmes possédant de nombreux degrés de liberté. Les auteurs mettent en évidence les propriétés des matrices GOE dans le spectre d'un système de dimension 2 classiquement chaotique. Leur conjecture s'énonce comme suit : *Spectra of time-reversal-symmetric systems whose classical analogues are k-systems show the same fluctuation properties as predicted by GOE.*

De même que l'hypothèse de Wigner, la conjecture BGS est soutenue par de nombreuses expériences, menées par exemple avec des ondes électromagnétiques micro-ondes en cavité résonante (Stein and Stöckmann, 1992; Kudrolli et al., 1994) ou avec des ondes acoustiques piégées dans une colonne de fluide (Chinnery and Humphrey, 1996), ainsi que par de nombreuses simulations numériques e.g. (Baecker et al., 1994). Un mot sur les symétries s'impose à ce stade. En effet dans les systèmes possédant des symétries spatiales (par exemple les deux axes du stade), les modes propres sont séparés en classes de symétries. Ces classes de symétries forment des spectres indépendants. Il faut séparer ces spectres avant de faire des statistiques.

La conjecture BGS ouvre également la voie, dans le cadre certes restreint des systèmes qui admettent une limite classique, à une justification par des arguments théoriques des propriétés universelles des spectres complexes (voir aussi Kos et al. (2018) pour les systèmes en interaction). De gros progrès en ce sens ont été effectués par Berry (1985). L'idée de Berry consiste à regarder le facteur de forme

$$K(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(2\pi\xi\tau) \langle [d(e - \frac{1}{2}\xi) - 1][d(e + \frac{1}{2}\xi) - 1] \rangle_E, \quad (2.71)$$

avec  $e_n = E_n \bar{d}(E)$  les niveaux d'énergie du spectre rectifié ( $\bar{d}(E)$  étant l'écart moyen entre les niveaux d'énergie) et  $\tau$  une grandeur adimensionnée qui joue le rôle d'un temps. La moyenne  $\langle \cdot \rangle_E$  s'effectue sur un domaine d'énergie qui est grand devant  $\bar{d}(E)$  mais petit devant l'énergie  $E$ . En utilisant la formule des traces, il remplace la densité  $d(e)$  par une somme sur les orbites périodiques et obtient (Berry, 1991)

$$K(\tau) \sim \frac{1}{h\bar{d}(E)} \left\langle \sum_i \sum_j A_i A_j \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (S_i(E) - S_j(E)) \right] \delta \left[ T - \frac{1}{2} (T_i + T_j) \right] \right\rangle_E, \quad (2.72)$$

où  $T = \partial S / \partial E$  est la période temporelle des orbites périodiques, reliée à  $\tau$  par  $T = \tau h \bar{d}(E)$ . L'objectif est maintenant de trouver une expression approchée de 2.72. Une approximation naturelle consiste à ne garder que les termes diagonaux  $i = j$  dans la double somme au moment de calculer la moyenne  $\langle \cdot \rangle_E$ . Cette opération, connue sous le nom d'*approximation diagonale*, amène à

$$K(\tau) \sim K_D(\tau) = \frac{1}{h\bar{d}(E)} \sum_j A_j^2 \delta(T - T_j), \quad (2.73)$$

À ce stade, Berry invoque la règle de somme de Hannay and Ozorio de Almeida (1984),  $\sum_j A_j^2 \delta(T - T_j) \approx T$ , qui est valable universellement pour les orbites périodiques quand leur période temporelle  $T$  tend vers l'infini. Le facteur de forme suit donc, dans l'approximation diagonale, un comportement linéaire

$$K_D(\tau) \approx \tau. \quad (2.74)$$

Sur la Fig. 2.10, nous comparons  $K_D(\tau)$  au facteur de forme  $K_{GOE}(\tau)$  calculé pour l'ensemble GOE des matrices aléatoires.  $K_D(\tau)$  et  $K(\tau)$  coïncident aux temps courts. Plus précisément, l'approximation diagonale cesse d'être valide quand  $\tau h \bar{d}(E)$  est de l'ordre du temps de Ehrenfest  $T_E \approx (1/h) \ln \hbar$ , où  $h$  est l'exposant de Lyapunov (Bogomolny, 2003). Il existe en effet, au-delà de  $T \sim T_E$ , des paires d'orbites dont les actions  $S_i$  et  $S_j$  sont quasi-dégénérées, du fait de la croissance exponentielle de la densité d'orbites périodiques (voir Éq. 2.21). Une approximation du facteur de forme à l'ordre supérieur a été dérivée dans une série de papiers démarrée en 2001 par Sieber et Richter (Sieber and Richter, 2001).

On peut dériver l'expression asymptotique de nombreuses quantités statistiques en les reliant au facteur de forme. Par exemple pour la variance  $\Sigma^2(L)$ , où  $L$  désigne une distance spectrale (i.e. un intervalle d'énergie), on a (Berry, 1991)

$$\Sigma^2(L) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty d\tau \frac{K(\tau)}{\tau^2} \sin^2(\pi L \tau). \quad (2.75)$$

Il faut garder à l'esprit que ces justifications sont le produit d'hypothèses sur les propriétés supposées génériques des systèmes chaotiques. Il existe des contre-exemples connus aux conjectures de Berry-Tabor et BGS. Ainsi, on trouve de la répulsion de

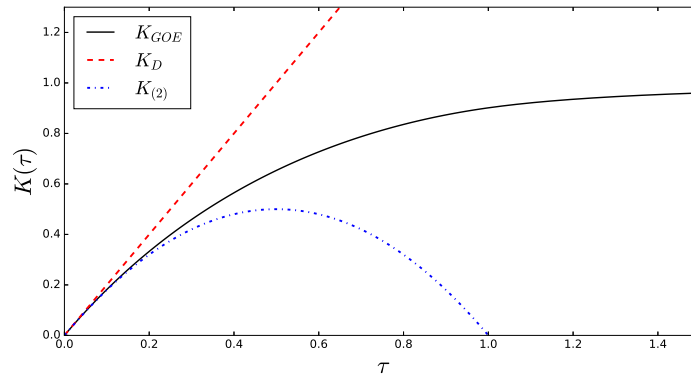


FIGURE 2.10 – Comparaison entre le facteur de forme  $K_{GOE}(\tau)$  pour les système symétriques par renversement du temps et ses approximations pour les temps courts  $K_D(\tau)$  au premier ordre (Berry, 1985) et  $K_{(2)}(\tau)$  au second ordre (Sieber and Richter, 2001). Notons que dans les système symétriques par renversement du temps les orbites périodiques sont dégénérées 2 fois. On a ainsi  $K_D(\tau) \approx 2\tau$ .

niveaux dans le spectre de deux oscillateurs harmoniques découplés, système pourtant intégrable. De même certains billards à surface de courbure négative (Schmit, 1991; Bogomolny et al., 1992) ont un spectre Poissonien en dépit d’une dynamique chaotique. On peut ajouter à cette liste les modes de pression chaotiques étudiées dans cette thèse. Dans ce dernier cas, c’est le caractère fortement inhomogène du milieu stellaire qui provoque une déviation par rapport aux corrélations GOE. Plus subtilement, il peut aussi y avoir des système chaotiques et symétriques par renversement du temps, mais qui ne suivent pas la statistique GOE (Leyvraz et al., 1996) à cause des particularités du système.

## Chapitre 3

# Modes de pression dans les étoiles en rotation rapide

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Théorie linéaire des oscillations</b>	<b>53</b>
<b>3.2</b>	<b>Oscillations dans un modèle d'étoile polytropique</b>	<b>56</b>
3.2.1	Le modèle polytropique	56
3.2.2	Calcul des pulsations	57
<b>3.3</b>	<b>Méthodes asymptotiques</b>	<b>59</b>
3.3.1	Limite des rayons	60
3.3.2	Structures dans l'espace des phases	64
3.3.3	Associer les modes aux rayons	66
3.3.4	Spectres d'oscillation réguliers et chaotiques	68

Les effets de la rotation sur les modes p commencent à être bien compris d'un point de vue théorique. En effet les codes 2D d'oscillation stellaire sont performants et permettent de calculer les fréquences et les modes propres de modèles d'étoiles déformés. Cela permet de produire des spectres artificiels de pulsateurs en rotation. De plus l'analyse asymptotique explique qualitativement la transition entre la rotation nulle et les rotations élevées, aussi bien du point de vue de la distribution spatiale des modes que de l'organisation du spectre.

Nous commençons ce chapitre par une revue des équations de base décrivant les oscillations stellaires. La section 3.2 décrit brièvement les méthodes numériques utilisées pour produire un modèle polytropique d'étoile en rotation et calculer ses pulsations. Ce modèle a été utilisé pour l'analyse asymptotique des modes p par [Lignières and Georgeot \(2008, 2009\)](#); [Pasek et al. \(2011, 2012\)](#). La section 3.3 présente leurs résultats. Le modèle d'étoile et les outils numériques présentés dans ce chapitre ont aussi été utiles au cours de la thèse pour le calcul des modes chaotiques et des rayons.

### 3.1 Théorie linéaire des oscillations

Les équations de l'hydrodynamique pour un fluide autogravitant sont décrites par le système suivant [Unno \(1989\)](#)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f}_{\text{ext}} - \nabla p - \rho \nabla \phi, \quad (3.2)$$

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \rho \epsilon - \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (3.3)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (3.4)$$

$$p = p(\rho, T, X_i). \quad (3.5)$$

Dans ces équations les variables  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $S$  et  $\mathbf{v}$  correspondent respectivement à la densité, la pression, la température, l'entropie et la vitesse du fluide. Le terme  $\phi$  correspond au potentiel gravitationnel,  $\epsilon$  au taux de production de l'énergie par les réactions nucléaires,  $\mathbf{F}$  au flux radiatif et  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  à l'ensemble des forces extérieures.

$$\mathbf{F} \propto (-\nabla T). \quad (3.6)$$

La constante de proportionnalité étant sensible à la densité, à la température et à l'opacité du milieu. La notation  $D/Dt$  désigne la dérivée matérielle

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (3.7)$$

où le terme  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  représente les variations du fluide par advection. Chacune des équations précédentes a un sens physique précis. L'équation de continuité, Éq. 3.1 exprime la conservation de la masse. L'équation de Navier-Stokes, qui décrit la dynamique des fluides visqueux, exprime la conservation de l'impulsion. Enfin la conservation de l'énergie mène à l'Éq. 3.3, qui exprime le fait que les variations de la chaleur  $dQ = TdS$  dépendent de l'équilibre entre la production et la perte de l'énergie par les réactions nucléaire d'un côté et le flux radiatif de l'autre. Pour compléter le système, on ajoute l'équation de Poisson qui relie le champ gravitationnel à la distribution de la masse et pour conclure une équation d'état qui relie les variables  $p$ ,  $\rho$  et  $T$  et qui dépend de la composition chimique dans l'étoile, représentée par les abondances  $X_i$  des divers éléments. Les étoiles de la séquence principale sont assez bien modélisées par l'équation d'état des gaz parfaits

$$p = \mathcal{R} \frac{\rho T}{\mu}, \quad (3.8)$$

où  $\mathcal{R}$  est la constante des gaz parfaits et  $\mu$  est le poids moléculaire moyen, définit par

$$\mu = \left( \sum_i \frac{X_i(1 + Z_i)}{\mu_i} \right)^{-1}, \quad (3.9)$$

où l'indice  $i$  dénote les différents éléments chimiques. Pour chaque élément,  $X_i$  correspond à la fraction ( $\sum_i X_i = 1$ ),  $Z_i$  au nombre de charges et  $\mu_i$  au poids moléculaire (Kippenhahn and Weigert, 1990).

Nous avons négligé la viscosité car elle est en général très faible dans les étoiles sans convection, ce qui est justifié pour l'étude des oscillations que nous allons mener



(Unno, 1989). Pour simplifier davantage les équations on considère une étoile isolée (sans partenaire) et sans champ magnétique. Alors il n'y a pas de forces extérieures et l'équation de Navier-Stokes se ramène alors l'équation d'Euler

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - \rho \nabla \phi. \quad (3.10)$$

La période typique d'une oscillation est donnée par le temps caractéristique  $\tau_{osc} \approx (R^3/GM)^{1/2}$ , où  $R$  est le rayon de l'étoile et  $M$  sa masse. Cette échelle de temps est à comparer au temps de Kelvin-Helmholtz  $\tau_{KH} \approx GM^2/2RL$ , où  $L$  est la luminosité, et au temps  $\tau_{nuc} = E_{nuc}/L$  où  $E_{nuc}$  correspond au réservoir d'énergie nucléaire disponible. Le premier caractérise le temps nécessaire pour qu'une perturbation thermique traverse l'étoile du centre jusqu'à la surface. Le second est une estimation de la durée de vie de l'étoile. Dans le Soleil on a (Kippenhahn and Weigert, 1990)

$$\tau_{nuc} (\sim 10^{11} \text{ ans}) \gg \tau_{KH} (\sim 1.6 \times 10^7 \text{ ans}) \gg \tau_{osc} (\sim 27 \text{ minutes}). \quad (3.11)$$

Ce résultat reste valable plus largement pour toutes les étoiles qui produisent leur énergie par la fusion de l'hydrogène en hélium, c'est-à-dire les étoiles de la séquence principale. Ainsi une étoile passe le plus gros de sa vie en équilibre hydrostatique et thermique. On sépare donc, dans le système Éqs. 3.1-3.5 les fonctions scalaires en deux parties

$$f(\mathbf{x}, t) = f_0(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x}, t), \quad (3.12)$$

correspondant à la valeur d'équilibre et à la perturbation Eulérienne. On considère le cas d'une étoile en rotation uniforme, soit  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ . L'équation d'Euler Éq. 3.10 pour l'état d'équilibre prend la forme (Unno, 1989)

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 - \nabla \phi_0, \quad (3.13)$$

où on voit apparaître la force centrifuge dans le terme de gauche. Pour les perturbations l'Éq. 3.10 écrite dans le référentiel en co-rotation devient (Unno, 1989)

$$\rho_0 \frac{D\mathbf{v}'}{Dt} + 2\rho_0 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' = -\nabla p' - \rho_0 \nabla \phi' - \rho' \nabla \left( \phi_0 - \frac{\Omega^2 d^2}{2} \right), \quad (3.14)$$

avec

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (3.15)$$

La rotation introduit ainsi la force de Coriolis (second terme de l'équation Éq. 3.14) et le potentiel centrifuge  $\Omega^2 d^2/2$  où  $d$  est la distance à l'axe de rotation.

## 3.2 Oscillations dans un modèle d'étoile polytropique

### 3.2.1 Le modèle polytropique

Un modèle d'étoile polytropique est un modèle d'étoile simplifié dans lequel une relation polytropique entre la pression et la densité est donnée a priori. Cela évite de résoudre l'équation du transport de l'énergie thermique et permet de réduire les équations décrivant le modèle d'étoile à l'équilibre (données à l'annexe A.1) à trois équations : la relation polytropique, l'équation de l'hydrostatique et l'équation de Poisson

$$P_0 = K \rho_0^{1+1/N}, \quad (3.16)$$

$$0 = -\nabla P_0 - \rho_0 \nabla(\phi_0 - \Omega^2 d^2/2), \quad (3.17)$$

$$\Delta \psi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (3.18)$$

où  $K$  est la constante polytropique,  $N$  l'indice polytropique,  $\Omega$  le taux de rotation que l'on suppose uniforme spatialement et  $G$  la constante de Newton. Dans l'équation de l'équilibre hydrostatique intervient la gravité effective qui prend en compte la somme du potentiel gravitationnel et du potentiel centrifuge

$$\mathbf{g}_0 = -\nabla(\phi_0 - \Omega^2 d^2/2). \quad (3.19)$$

Dans le cas sans rotation, un polytrope d'indice  $N$  est une solution de l'équation de Lane-Emden (Hansen et al., 2004), qui est une réécriture de l'équation de Poisson prenant en compte la relation polytropique :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} \right) = -\bar{\rho}^N, \quad (3.20)$$

avec

$$\bar{\rho}_N(\xi) = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \xi = \frac{r}{\left( \frac{(n+1)P_c}{4\pi G \rho_c^2} \right)^{1/2}}, \quad (3.21)$$

où  $\rho_c$  est la densité au centre  $\rho_c = \rho(r=0)$  et  $P_c$  est donné par  $\rho_c$  via la relation polytropique. Les solutions  $\bar{\rho}_N(\xi)$  de l'équation de Lane-Emden découlent des conditions aux limites suivantes

$$\bar{\rho}(\xi=0) = 1 \quad \frac{d\bar{\rho}}{d\xi}(\xi=0) = 0 \quad \bar{\rho}(\xi=\xi_s) = 0, \quad (3.22)$$

où  $\xi = \xi_s$  à la surface. Pour certaines valeurs de l'indice polytropique, les solutions  $\bar{\rho}_N(\xi)$  ont l'avantage d'être analytiques. On choisit comme indice  $N = 3$  car ce choix modélise bien les couches radiatives (Hansen et al., 2004). En effet l'objectif est de se rapprocher des étoiles pulsantes en rotation rapide qui sont pour l'essentiel en équilibre radiatif. Pour  $N = 3$ , l'équation de Lane-Emden doit-être résolue numériquement.

Pour résoudre les Éqs. 3.16, 3.17 et 3.18 en prenant en compte les effets de la rotation, on introduit la pseudo enthalpie  $h_0 = \int dP_0/\rho_0 = (1+N)P_0/\rho_0$ . Ainsi, en intégrant l'Éq. 3.17, on obtient

$$h_0 = h_c - (\phi_0 - \phi_c) + \Omega^2 d^2 / 2, \quad (3.23)$$

où l'indice 'c' désigne la valeur au centre du polytrope. Finalement on injecte la nouvelle expression de  $\phi$  dans l'équation de Poisson

$$\Delta\phi_0 = 4\pi G\rho_c \left( 1 - \frac{\phi_0 - \phi_c}{h_c} + \frac{\Omega^2 d^2}{2h_c} \right)^N. \quad (3.24)$$

L'Éq. 3.24 est alors résolue numériquement par une méthode de Newton décrite en détail dans [Rieutord et al. \(2005\)](#).

### 3.2.2 Calcul des pulsations

Nous avons décrit les équations décrivant l'état d'équilibre d'un modèle polytropique d'étoile en rotation, ainsi que les méthodes numériques utilisées pour les résoudre. Dans cette section nous présentons les méthodes permettant de calculer les oscillations de ce modèle d'étoile.

#### Petites perturbations

On cherche les perturbations de faible amplitude autour de l'état d'équilibre avec une dépendance harmonique en temps de la forme  $\exp(\lambda t)$ , avec  $\lambda = i\omega$ . Pour obtenir les équations du modèle perturbé, on introduit 3.12 dans les équations du mouvement, on soustrait les équations du modèle à l'équilibre et on ne garde que les termes linéaires dans les quantités perturbées.

On fait ensuite une série d'approximations standard pour simplifier les équations. D'abord, on se restreint au cas des perturbations adiabatiques, ce qui revient à négliger la viscosité et la diffusivité thermique (voir l'annexe A.1). Le fait de s'intéresser au régime des hautes fréquences autorise davantage de simplifications. D'abord, la force de Coriolis peut être négligée, puisqu'elle agit sur des temps de l'ordre de  $1/2\Omega$  qui sont grands devant la fréquence des oscillations. Les calculs numériques réalisés dans [Reese et al. \(2006\)](#) confirment la validité de cette approximation à haute fréquence, ils montrent aussi que l'impact de la force de Coriolis sur les basses fréquences est faible, mais pas négligeable. On applique pour finir l'approximation de Cowling, valide à haute fréquence, et qui consiste à négliger les perturbations du potentiel gravitationnel  $\phi'$ . Cette démarche mène au système suivant ([Lignières and Georgeot, 2009](#))

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}') = 0, \quad (3.25)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla P' + \rho \mathbf{g}_0, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla P_0 = c_s^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \rho_0 \right), \quad (3.27)$$

où  $\mathbf{u}'$ ,  $\rho'$  et  $P'$  sont les perturbations Eulériennes de la vitesse, de la densité et de la pression. La vitesse du son est définie comme  $c_s = \sqrt{\Gamma P_0 / \rho_0}$  avec  $\Gamma = (\partial \ln p / \partial \ln \rho)_s =$

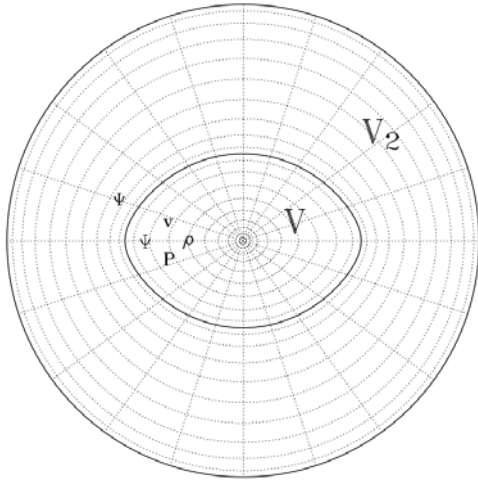


FIGURE 3.1 – Grille de coordonnées sphéroïdales  $(\zeta, \theta)$  dans le plan méridien.

$5/3$  l'exposant adiabatique du gaz, où l'indice  $s$  indique que le calcul est effectué à entropie constante. Les deux premières Éqs. 3.25 et 3.26 expriment respectivement la conservation de la matière et de l'impulsion, tandis que la troisième 3.27 exprime la relation entre les perturbations de pression et de densité dans le cas adiabatique. Dans la suite, nous cesseront d'utiliser le symbole « ' » pour désigner les quantités perturbées afin de simplifier les notations. La dérivée temporelle introduit dans les équations la pulsation  $\lambda = i\omega$ . Pour résoudre ce système, nous avons besoin d'une méthode efficace de résolution de problèmes aux valeurs propres.

## Le programme TOP

Le programme TOP résout le problème aux valeurs propres composé de l'équation de continuité, de l'équation d'Euler, de l'équation de l'énergie et de l'équation de Poisson. Ici, on se restreindra aux équations dérivées dans la section 3.2.2.

Pour caractériser la déformation de l'étoile, on utilise l'aplatissement  $\epsilon = 1 - R_p/R_{eq}$ . Plus l'aplatissement est proche de l'unité et plus la géométrie de l'étoile s'éloigne de la sphère. Pour prendre en compte cette déformation sans perdre en précision numérique, il est utile d'adopter un système de coordonnées sphéroïdal  $(\zeta, \theta, \phi)$  de telle sorte que la surface de l'étoile coïncide avec une surface de coordonnée. Le système de coordonnées choisit provient de Bonazzola et al. (1998). Dans ce système, seule la coordonnée radiale est transformée :  $r \rightarrow \zeta$ , avec

$$r(\zeta, \theta) = (1 - \epsilon)\zeta + \frac{5\zeta^3 - 3\zeta^5}{2}(r_s(\theta) - 1 + \epsilon), \quad (3.28)$$

où  $r_s(\theta)$  est la surface de l'étoile. La coordonnée  $\zeta$  est définie de telle sorte que les origines sont confondues,  $\zeta = 0$  quand  $r = 0$ , et que la surface de coordonnée  $\zeta = 1$  coïncide avec la surface de l'étoile. Au-delà de  $\zeta = 1$ , on définit un second domaine dans lequel la relation  $r(\zeta, \theta)$  est telle que la surface de coordonnée  $\zeta = 2$  forme un cercle. Ceci facilite l'implémentation de la condition au bord, qui exprime le fait que le potentiel gravitationnel doit tendre vers zéro à l'infini. Une grille de coordonnées typique, comme montré sur la Fig. 3.1, est ainsi composée d'un domaine stellaire et d'un domaine extérieur à l'étoile.

Pour discrétiser les équations, on utilise des méthodes spectrales. Ces méthodes permettent une convergence exponentielle avec la résolution. Par comparaison, la méthode des différences finies converge algébriquement. Les fonctions scalaires, comme la pression, sont projetées sur une base de polynômes de Chebyshev  $T_j$  dans la direction radiale et sur les harmoniques sphériques  $Y_\ell^m$  pour la partie angulaire. À l'issue de la projection, les fonctions scalaires sont définies dans *l'espace spectral* par les coefficients  $a_j^{l,m}$ , où les indices  $[j, l, m]$  correspondent à l'indice du polynôme de Chebyshev ainsi qu'au degré et à l'ordre azimuthal des harmoniques sphériques. Comme la rotation brise la symétrie sphérique, les variables  $r$  et  $\theta$  ne sont pas séparables et les solutions des équations s'écrivent comme des combinaisons linéaires des fonctions  $T_j$  et  $Y_\ell^m$

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=|\ell|}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{l,m} T_j(2r-1) \right) Y_\ell^m(\theta, \phi). \quad (3.29)$$

La symétrie axiale assure toutefois la séparabilité suivant  $\phi$  :  $f(r, \theta, \phi) = \tilde{f}(r, \theta) \exp(im\phi)$ . Chaque valeur de  $m$  correspond alors à une classe de modes indépendants. De la même manière, la symétrie équatoriale est responsable de la séparation entre les modes symétriques par rapport à l'équateur (modes *pairs*) et antisymétriques (modes *impairs*). Une troisième et dernière symétrie existe dans le système si on se place dans le référentiel de co-rotation et que l'on néglige la force de Coriolis (Reese et al., 2006). Elle implique que le sens de rotation ne joue pas sur la fréquence :  $\omega_{n,\ell,m} = \omega_{n,\ell,-m}$ .

Après projection des équations dans l'espace spectral, on obtient un problème aux valeurs propres algébrique de grande dimension. En effet, le système d'équations décrivant les perturbations Éqs. 3.25, 3.26 et 3.27 s'écrit  $\mathcal{A}v = \lambda \mathcal{B}v$ , où la fréquence  $\lambda$  est la valeur propre,  $v$  le vecteur propre contenant la structure spatiale du mode d'oscillation et  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des grandes matrices (Reese, 2006) de taille  $(N_r \times N_\theta)^2$ , où  $N_r$  et  $N_\theta$  correspondent au nombre de points dans les directions radiale et angulaire. Ce système est résolu numériquement par la méthode d'Arnoldi-Tchebychev (Saad and Mehrmann, 1995; Reese, 2006). Cette méthode est efficace et permet de trouver quelques valeurs propres autour d'une fréquence cible. Pendant ma thèse, j'ai utilisé une version de TOP avec une interface en langage python développée par Bertrand Putigny.

### 3.3 Méthodes asymptotiques

Les fréquences acoustiques observées dans les  $\delta$  Scuti ont typiquement un ordre radial  $n \leq 10$ . Cette donnée amène à se demander en quoi l'approche asymptotique pourrait être pertinente, alors même qu'elle postule que les fréquences sont extrêmement élevées (nous précisons cette notion plus bas). La réponse tient essentiellement en deux points. D'abord, le régime asymptotique est une sorte de cas idéal où les fréquences obéissent à des règles strictes (par exemple, à rotation nulle, la différence  $\omega_{n+1,\ell,m} - \omega_{n,\ell,m}$  entre deux modes séparés d'un ordre radial est constante asymptotiquement). Le spectre asymptotique doit être vu comme un patron sur lequel vient se greffer le spectre réel : plus les fréquences seront élevées et plus ces deux spectres seront similaires. Le second point concerne l'information que l'on espère extraire des spectres, en reliant par exemple les régularités observées aux propriétés du milieu stellaire. On peut constater à partir du calcul numérique une régularité dans le spectre (Lignières

et al., 2006; Reese et al., 2008). Cette régularité s'exprime, dans le cas des modes d'ilots, à travers une formule empirique (Reese et al., 2008) :  $\omega_{n,\ell,m} = \Delta_n n + \Delta_\ell \ell + \Delta_m |m|$ . Pour aller plus loin, il faut trouver des expressions analytiques des paramètres  $\Delta_n$ ,  $\Delta_\ell$  et  $\Delta_m$ . C'est ici que le régime asymptotique apporte un plus, en permettant de relier les quantités  $\Delta$  de la formule précédente aux propriétés physiques de l'étoile, grâce aux outils de la physique semiclassique. Ces outils permettent en plus de sonder finement les propriétés du milieu stellaire, par exemple les propriétés locales en appliquant des conditions de quantifications sur une orbite spécifique (Pasek, 2012).

Dans les prochaines sections, nous allons rappeler les résultats de Lignières and Georgeot (2008, 2009); Pasek et al. (2011, 2012) sur la structure du spectre asymptotique des modes p dans les étoiles en rotation rapide. Ces travaux combinent les outils théoriques de la physique semiclassique et les outils numériques présentés ci-dessus, comme le code TOP pour calculer des modes de haute fréquences. Les spectres calculés numériquement jouent à la fois le rôle de guide pour trouver des formules empiriques et de référence pour valider ou infirmer les prédictions théoriques.

### 3.3.1 Limite des rayons

Dans cette section, nous allons étudier les oscillations de la pression dans la limite des petites longueurs d'ondes où elles se comportent comme des rayons. Nous allons succinctement dériver les équations qui régissent le comportement des rayons, en nous basant sur Lignières and Georgeot (2009), puis nous préciserons la méthode numérique utilisée pour les résoudre.

## Formalisme

Dans un télescope optique ou une paire de jumelles, le parcours de la lumière est souvent décrit par les lois de l'optique géométrique, en suivant les réfractions et réflexions des rayons lumineux dans l'instrument. De par sa nature ondulatoire, la physique de la lumière est complexe et ne saurait se réduire au tracé des rayons dans le cas général. Il s'agit d'un régime spécifique valide uniquement quand la longueur d'onde est faible devant l'échelle de variation du milieu. Pour les ondes sonores, on caractérise ce régime par le nombre adimensionné  $\Lambda^{-1} = \lambda/H_p$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $H_p = -d \ln P/dr$  est l'échelle de hauteur de la pression du modèle d'équilibre, qui, dans une étoile, varie principalement dans la direction radiale. On parle dans le cas des ondes sonores de *rayons acoustiques*. Mathématiquement, la limite des petites longueurs d'ondes s'obtient en cherchant des solutions de la forme

$$\Psi = \text{Re}[A(\mathbf{x}) \exp(i\Lambda\phi(\mathbf{x}) - i\omega t)] = \text{Re}[\hat{\Psi} \exp(-i\omega t)]. \quad (3.30)$$

C'est l'approximation WKB que nous avons présentée dans la section 2.2.2 dans le contexte de la mécanique quantique. Avant de procéder à l'approximation WKB, il est conseillé de ramener le système d'équations sous sa *forme normale*, ce qui revient à supprimer les dérivées premières. Le système d'Éqs. 3.25, 3.26 et 3.27 a pour forme normale

$$\Delta \hat{\Psi} = \frac{\omega_c^2 - \omega^2}{c_s^2} \hat{\Psi} + \frac{N_0^2}{\omega^2} \left[ \Delta - \frac{1}{g_0^2} (\mathbf{g}_0 \cdot \nabla)(\mathbf{g}_0 \cdot \nabla) \right] \hat{\Psi}, \quad (3.31)$$

où  $\hat{\Psi} = \hat{P}/\alpha$ , avec  $\hat{P}$  l'amplitude complexe de la pression et  $\alpha$  une fonction du milieu stellaire.  $N_0$  est la fréquence de Brunt-Väisälä qui correspond à la limite supérieure pour les fréquences des modes de gravité. La fréquence de coupure  $\omega_c$  est reliée à la vitesse du son et à l'échelle de hauteur de pression, calculées à la surface de l'étoile, par  $\omega_c \approx c_s/(2H_p)$  (Gough, 1993). Elle correspond à la fréquence maximale pour former une onde acoustique résonante. En effet pour construire les modes propres, qui sont des ondes stationnaires, il faut que les ondes se propageant vers l'extérieur interagissent constructivement avec les ondes se propageant vers l'intérieur, ce qui nécessite un rebond des ondes à la surface. Ce rebond a lieu si la longueur d'onde  $\lambda$  est de l'ordre de l'échelle de variation de la pression  $H_p$ . Dans le Soleil, la fréquence de coupure été évaluée à  $\nu_c = \omega_c/2\pi \approx 5100 \mu\text{Hz}$  (Jiménez, 2006). Les ondes sonores s'obtiennent dans la limite  $\omega \gg N_0$ , ce qui permet de négliger le terme de gravité dans l'Éq. 3.31 afin de se ramener à une équation de type Helmholtz

$$\Delta \hat{\Psi} = \frac{\omega_c^2 - \omega^2}{c_s^2} \hat{\Psi}. \quad (3.32)$$

Pour les ondes acoustiques de haute fréquence, la relation polytrophique permet de simplifier la fonction  $\alpha$  qui est alors proportionnelle à  $\rho^{1/2}$ , de sorte que  $\hat{\Psi} \propto \hat{P} \rho_0^{-1/2}$ . La fréquence de coupure  $\omega_c$  s'écrit

$$\omega_c^2 = \left[ \frac{\Gamma N(N+2)}{2(N+1)} - 2 \right] \frac{g_0^2}{2h_0} + \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{\Gamma N}{N+1} \right) \nabla \cdot \mathbf{g}_0. \quad (3.33)$$

Le concept de domaine asymptotique pour les fréquences propres est subtile, car on demande à l'onde de satisfaire deux critères en apparence contradictoires :  $\lambda \gg H_p$  par définition du régime asymptotique et  $\lambda \sim H_p$  car on s'intéresse aux modes propres. La résolution du paradoxe vient du fait que  $H_p$  varie sur plusieurs ordres de grandeurs entre le centre de l'étoile et la surface (Gough, 1993), si bien que l'on a  $H_p(r=0) \gg H_p(r=r_s)$ . En conclusion, le régime asymptotique correspond à des ondes telles que  $\lambda \sim H_p(r=r_s)$ . Notons que cette limitation n'existe pas dans les modèles polytropiques pour lesquels la fréquence de coupure est infinie à la surface. En remplaçant  $\hat{\Psi}$  par l'ansatz 3.30 dans l'Éq. 3.32, on trouve à l'ordre dominant en  $\Lambda^{-1}$  l'équation eikonale

$$\omega^2 = \omega_c^2 + c_s^2 k^2, \quad (3.34)$$

avec  $\mathbf{k} = \Lambda \nabla \phi$ . Pour trouver les chemins de propagation on applique un principe variationnel (principe de Fermat pour les rayons lumineux). Cela conduit à une formulation Hamiltonienne de la dynamique des rayons où  $\omega = (\omega_c^2 + c_s^2 k^2)^{1/2}$  joue le rôle de le Hamiltonien. On peut également écrire l'Hamiltonien sous une forme plus familière comme la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle<sup>1</sup>

---

1. Les deux formulation Hamiltoniennes génèrent bien les mêmes trajectoires.

$$H = \frac{\tilde{\mathbf{k}}^2}{2} + V(\mathbf{x}), \quad (3.35)$$

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\tilde{c}_s^2} = -\frac{1}{2c_s^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right), \quad (3.36)$$

où on a introduit le vecteur d'onde renormalisé  $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/\omega$  et la vitesse du son renormalisée  $\tilde{c}_s = c_s/(1 - \omega_c^2/\omega^2)^{1/2}$ . Notons que ces quantités permettent d'écrire très simplement la relation de dispersion (Éq. 3.34) comme  $\tilde{c}_s \tilde{k} = 1$ , où  $\tilde{k}$  est la norme du vecteur  $\tilde{\mathbf{k}}$ . La comparaison avec la relation de dispersion montre que le Hamiltonien est bien une constante du mouvement puisqu'on a  $H = 0$ . La propagation des rayons acoustiques est ainsi gouvernée par le système dynamique suivant

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \tilde{\mathbf{k}}, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{k}}}{dt} = -\nabla V, \quad (3.37)$$

où  $\tilde{\mathbf{k}}$  et  $\mathbf{x}$  sont les variables conjuguées. La variable  $t$  est définie par  $dt = c_s ds/(1 - \omega_c^2/\omega^2)^{1/2}$  et n'a pas la dimension d'un temps.

Au cœur de l'étoile,  $\omega_c/\omega$  varie peu. Ainsi la forme du potentiel est modelée par les variations de la vitesse du son  $c_s$ , qui est spatialement inhomogène. À l'inverse,  $\omega_c$  diverge au plus près de la surface de l'étoile :  $\omega_c \gg \omega$ . Cela se traduit par une barrière de potentiel responsable de la réflexion de l'onde vers l'intérieur stellaire. Le potentiel dépend faiblement de  $\omega$ . Sur la Fig. 3.2 nous avons représenté le potentiel pour deux valeurs « extrêmes » de la fréquence, et nous constatons que les deux courbes sont quasiment superposées, à une différence près qui est la profondeur du puit de potentiel près de la surface. Exprimée dans les coordonnées renormalisées  $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}})$ , la dynamique des rayons est donc quasiment insensible aux variations de la fréquence. Dans ces coordonnées, les structures de l'espace des phases ne dépendent donc que très marginalement de la fréquence.

Grâce à la symétrie axiale le problème est réduit à deux degrés de liberté  $(r, \theta)$ . Si  $\tilde{L}_z = 0$ , le trajet d'un rayon acoustique est contenu dans un plan méridien de l'étoile. Si  $\tilde{L}_z \neq 0$ , les rayons ont une vitesse angulaire  $d\phi/dt = \tilde{L}_z/d^2$ . Le mouvement est toujours 2D si on projette la dynamique dans un plan méridien qui accompagne le rayon dans sa rotation. On a

$$H_r = \frac{\tilde{k}_p^2}{2} + V_r, \quad (3.38)$$

$$V_r = -\frac{1}{2\tilde{c}_s^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) + \frac{\tilde{L}_z^2}{2d^2}, \quad (3.39)$$

avec  $H_r$  et  $V_r$  l'Hamiltonien réduit et le potentiel réduit, et  $\tilde{k}_p$  la projection du vecteur d'onde renormalisé dans le plan tournant.



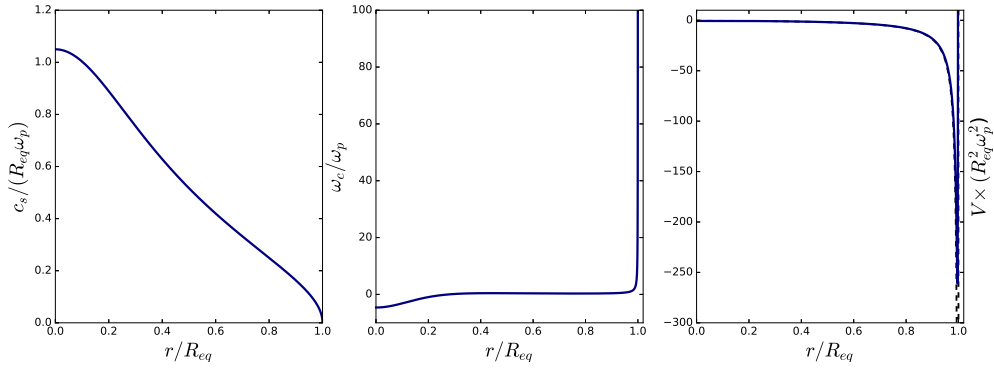


FIGURE 3.2 – De gauche à droite, la vitesse du son  $c_s$ , la fréquence de coupure  $\omega_c$  et le potentiel  $V$  le long du rayon équatorial à  $\Omega/\Omega_k = 0.489$ . Le potentiel est représenté en trait plein pour  $\omega_1 = 12.33\omega_p$  (avec  $\omega_p = (GM/R_p^3)^{1/2}$  et  $R_p$  est le rayon polaire) et en pointillés pour  $\omega_2 = 49.34\omega_p$ . Les modes de haute fréquence calculés dans cette thèse ont tous une fréquence comprise entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

## Méthode numérique pour le tracé des rayons

La propagation des rayons acoustiques est gouvernée par le système d'équations différentielles ordinaires couplées 3.37. Les équations sont intégrés numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 (Press et al.). En pratique, on utilise le solveur décrit dans (Brankin et al., 1993) et disponible sous la forme du module fortran 'rksuite 90'. Le solveur utilise un pas d'intégration adaptatif, ce qui permet d'optimiser le nombre d'itérations pour atteindre l'état final. Le potentiel fait intervenir les grandeurs  $c_s$  et  $\omega_c$  du modèle polytropique. Le modèle est calculé avec une méthode spectrale, de sorte les quantités du modèle peuvent être déterminées en un point quelconque à partir de leur coefficients spectraux.

Le système étant de dimension 4, les conditions initiales sont spécifiées dans le vecteur  $\mathbf{y} = (r, \theta, \tilde{k}_r, \tilde{k}_\theta)$ , où les composantes vectorielles sont exprimées dans la base naturelle par rapport aux coordonnées sphériques. La base naturelle est définie par les vecteurs  $\mathbf{E}_i = \partial \mathbf{x} / \partial x^i$ , où  $x^i = (r, \theta, \phi)$ . Les vecteurs de la base naturelle sont reliés aux vecteurs de la base sphérique par

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E}_\theta = r'_s(\theta)\mathbf{e}_r + r\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{E}_\phi = r \sin(\theta)\mathbf{e}_\phi. \quad (3.40)$$

Le choix de cette base particulière permet d'assurer que  $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}})$  sont bien des variables conjuguées.

En pratique, la condition initiale est spécifiée par trois paramètres : le rayon  $r$ , l'angle  $\theta$  et un angle additionnel  $\psi$  qui permet de connaître l'orientation du vecteur  $\tilde{\mathbf{k}}$ , dont on connaît la norme grâce à la relation de dispersion. On impose également le sens du vecteur  $\tilde{\mathbf{k}}$ , qui pointe toujours initialement vers le centre. De cette manière, le vecteur  $\mathbf{y}$  est complètement contraint. À l'occasion de cette thèse nous avons ajouté une manière de spécifier la condition initiale. Plutôt que de choisir l'orientation du rayon, on choisit ses coordonnées  $(\theta, \tilde{k}_\theta)_{PSS}$  ou  $(r, \tilde{k}_r)_{PSS}$  sur une des deux PSS présentées plus loin (voir Figs. 3.4 et 3.5). Le fait d'imposer une orientation à la PSS est alors une condition suffisante pour contraindre le vecteur  $\mathbf{y}$ . Cette seconde méthode offre

un grand contrôle sur le tracé de rayons et permet notamment de sonder les petites structures de l'espace des phases.

### 3.3.2 Structures dans l'espace des phases

Étant muni d'une méthode pour générer des trajectoires acoustiques à l'intérieur de l'étoile, nous pouvons construire une section de Poincaré (définie dans la section 2.1.1) pour visualiser ces trajectoires dans l'espace des phases. Nous distinguerons deux cas. À rotation nulle, la dynamique est complètement intégrable et toutes les trajectoires sont contraintes sur des surfaces ayant la topologie d'un tore. En revanche lorsque l'étoile est en rotation des structures plus complexes, caractéristiques des systèmes dynamiques mixtes, apparaissent dans l'espace des phases.

#### Système non perturbé : $\Omega = 0$

Le système dynamique qui gouverne la propagation des rayons possède  $N = 2$  degrés de libertés. Dans le système à rotation nulle on dénombre deux quantités conservées, l'Hamiltonien et la norme du moment angulaire par rapport au centre

$$\tilde{L} = \sqrt{\tilde{k}_\theta^2 + \left(\frac{\tilde{L}_z}{\sin \theta}\right)^2}. \quad (3.41)$$

Puisqu'il y a autant de constantes du mouvement indépendantes que de degrés de liberté, la dynamique est intégrable et les trajectoires évoluent sur une surface d'énergie ayant la topologie d'un tore. Pour visualiser ces trajectoires, on utilise une section de Poincaré (PSS). Le choix de [Lignières and Georgeot \(2009\)](#) est de définir une section qui intercepte la trajectoire entre chaque rebond à la surface. La PSS est définie par la courbe  $r_{pss}(\theta) = r_s(\theta) - z$ , où  $r_s(\theta)$  correspond au rayon de l'étoile pour l'angle  $\theta$  et  $z$  est une petite distance radiale. Il faut respecter les trois règles  nonc es dans la section 2.1.1. D'abord, toutes les trajectoires doivent traverser la PSS, ce qui est le cas à l'exception des trajectoires les plus rasantes (qui ne sont pas pertinentes). Ensuite, chaque point sur la PSS doit avoir un seul antécédent et une seule image. Pour cela on n'enregistre que les trajectoires sortantes ( $k_r > 0$ ), on dit que la PSS est orient e. Enfin, les coordonnées choisies pour représenter la PSS doivent être conjuguées, afin d'assurer la conservation des aires sous l'effet de la dynamique. On utilise pour cette raison les coordonnées naturelles  $(\theta, \tilde{k}_\theta^{nat})$ .

L'intersection d'une trajectoire avec la PSS forme les deux lignes droites  $\tilde{k}_\theta^{nat} = \pm \tilde{L}$  si  $\tilde{L}_z = 0$  ou plus généralement la courbe ferm e  $\tilde{k}_\theta^{nat} = (\tilde{L}^2 - (\tilde{L}_z/\sin \theta)^2)^{1/2}$ . Le cas  $\tilde{L}_z = 0$  est représenté sur la Fig. 3.3.

Le système à rotation nulle étant intégrable, on peut appliquer les règles de quantification EBK ([Gough, 1993](#)) pr sent es dans la section 2.2.3. Cela mène aux conditions suivantes

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \left( \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} \right)^{1/2} = \pi \left( n - \frac{1}{2} \right) \quad L = \ell + \frac{1}{2} \quad L_z = m, \quad (3.42)$$

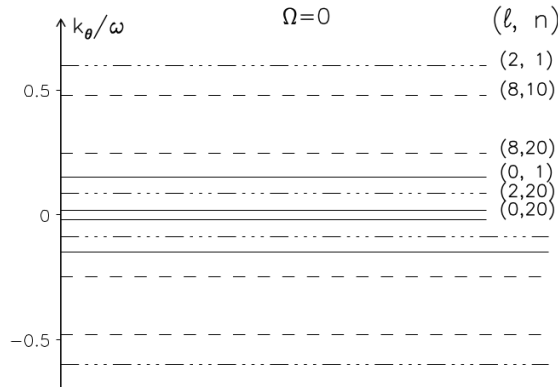


FIGURE 3.3 – Intersection des rayons acoustiques avec la PSS à rotation nulle dans le cas axisymétrique  $\tilde{L}_z = 0$ . Les modes correspondant aux tores sont indiqués par leurs nombres quantiques  $(\ell, n)$ . Figure tirée de Lignières and Georgeot (2009)

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les rayons associés aux caustiques interne et externe respectivement. Les nombres quantiques  $n$ ,  $\ell$  et  $m$  correspondent au nombre de nœuds dans les directions radiale, latitudinale et azimutale. À rotation nulle, on peut ainsi tracer les tores  $\tilde{k}_\theta = (\ell + 1/2)/\omega_{n,\ell,0}$  correspondant aux modes propres (voir Fig. 3.3, panneau de gauche ou Lignières and Georgeot (2009)). Pour les modes de bas degré ( $\ell \ll n$ ) la théorie asymptotique amène à la formule de Tassoul (Tassoul, 1980), présentée dans la section 1.1.2. Cette formule permet de relier l'écart régulier  $\delta$  entre deux modes d'ordre radial successif, autrement dit *la grande séparation*, à l'inverse de la vitesse du son intégrée le long du rayon de l'étoile.

### Système perturbé : $\Omega \neq 0$

Sous l'effet de la rotation, la surface de l'étoile se déforme, ce qui modifie évidemment la dynamique des rayons. Le système subit une transition depuis un régime complètement intégrable à rotation nulle jusqu'à devenir complètement chaotique dans le cas extrême où la rotation limite est atteinte (en effet, la surface forme un angle au niveau de l'équateur). Entre ces deux extrêmes, la dynamique est mixte avec à la fois des zones chaotiques et des zones stables dans l'espace des phases. Pour rappel, les trajectoires chaotiques et intégrables sont faciles à distinguer sur une PSS, car les premières recouvrent des surfaces alors que les secondes forment des lignes. Aux faibles rotations, on se trouve dans le régime perturbatif décrit par le théorème KAM (voir section 2.1.4). Ainsi la plupart des tores présents à rotation nulle ont résisté à la perturbation, au prix d'une légère déformation. En parallèle, des zones chaotiques et des chaînes d'îlots ont fait leur apparition, mais ces zones n'occupent qu'une petite fraction du volume de l'espace des phases. À haute rotation, la situation rappelle le cas du rotateur pulsé avec une forte perturbation du potentiel.

On visualisera l'espace des phase à l'aide de la PSS proche de la surface. On utilisera également l'autre section de Poincaré, introduite dans (Pasek et al., 2012), qui s'inscrit dans le plan équatorial. Chaque point sur cette seconde PSS, de coordonnées  $(r, \tilde{k}_r)$ , correspond au passage d'un rayon à travers le plan équatorial, avec  $(\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{e}_z < 0)$ . La

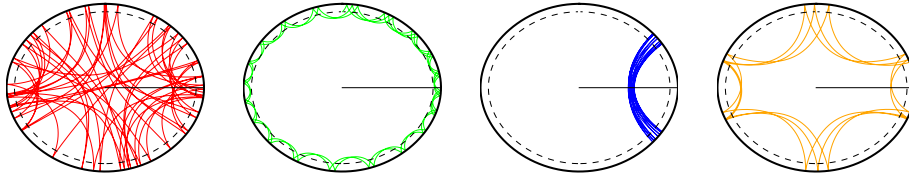


FIGURE 3.4 – Exemples de rayons acoustiques à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ . De gauche à droite : rayon ergodique, rayon ‘whispering gallery’, rayon îlot de période 2, rayon îlot de période 6. La ligne tiretée représente la PSS surfacique tandis que le trait plein reliant le centre de l’étoile à l’équateur représente la PSS équatoriale.

rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  est caractéristique des hautes rotations du point de vue de la dynamique. La Fig. 3.4 présente un exemple de chaque type de rayon à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  et les deux PSS, surfacique et équatoriale, sont représentées pour cette même rotation sur la Fig. 3.5. On voit sur chaque PSS une zone chaotique bien développée, à l’intérieur de laquelle émergent des chaînes d’îlots. La PSS surfacique (3.5, panneau de gauche) est la mieux adaptée pour visualiser les chaînes d’îlots. La chaîne d’îlots principale, composée de deux îlots, est associée à une orbite périodique centrale  $\gamma_c$  de période 2. On voit également une seconde chaîne composée de six îlots plus petits. La PSS équatoriale est bien adaptée pour étudier le comportement transversal des trajectoires de l’îlot principal au voisinage de  $\gamma_c$ . La zone chaotique centrale est limitée par les tores KAM qui ont survécu à la perturbation. Les rayons correspondant sont les ‘whispering gallery’ (qui se traduit par ‘galerie des chuchotements’), qui rasent indéfiniment la surface. En plus des zones que nous venons d’évoquer, l’espace des phases est rempli de structures similaires (chaînes d’îlots, zones chaotiques) à plus petite échelle. Nous verrons plus loin que ces structures fines ne sont pas pertinentes pour notre étude.

Cette image varie avec la rotation. En effet, à mesure que la rotation augmente, les tores KAM de  $\tilde{L}$  élevé sont détruits et la zone chaotique s’étend davantage. À faible rotation, l’orbite centrale de l’îlot principal correspond à l’orbite périodique stable qui relie les deux pôles de l’étoile. Autour de  $\Omega/\Omega_k = 0.26$ , l’orbite centrale subit une bifurcation : elle se sépare en deux orbites stables, une de chaque côté de l’axe de rotation, et une orbite instable sur l’axe. Les deux orbites stables vont ensuite migrer vers l’équateur à plus haute rotation. À la rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ , il y a une chaîne d’îlot de période 6 à l’intérieur de la zone chaotique centrale. Cette chaîne d’îlots disparaît finalement quand la rotation atteint  $\Omega/\Omega_k = 0.70$ .

Si  $\tilde{L}_z \neq 0$ , alors les rayons ne peuvent pas s’approcher arbitrairement de l’axe de rotation. Ils sont dans ce cas contraints dans un domaine restreint de l’étoile. Comme le montrent les Figs. 1 et 3 de la publication II, la zone chaotique est moins développée à rotation équivalente lorsque  $L_z \neq 0$ .

### 3.3.3 Associer les modes aux rayons

Asymptotiquement, chaque zone de l’espace des phases est quantifiée de manière indépendante, c’est le régime de Berry-Robnik. On s’attend donc à observer une diversité

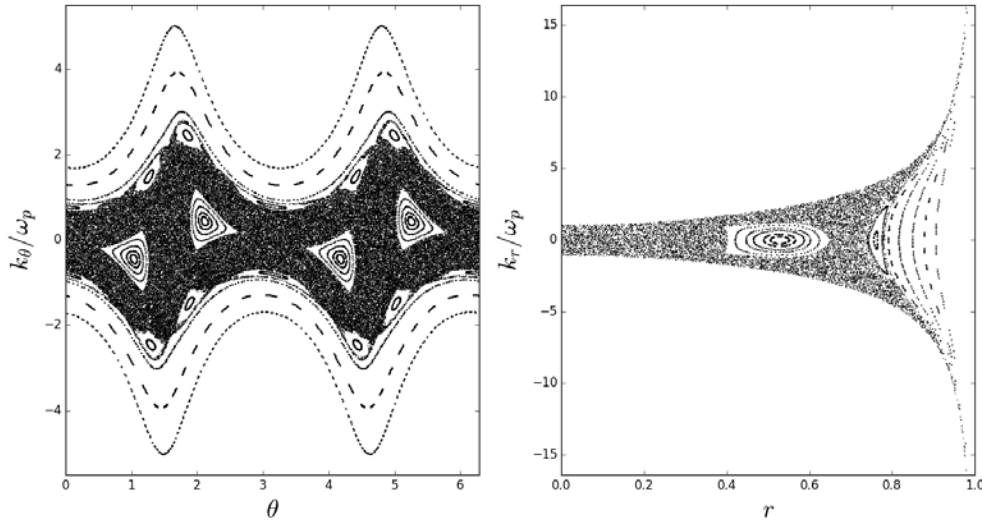


FIGURE 3.5 – Gauche : PSS surfacique à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  dans les coordonnées  $(\theta, \tilde{k}_\theta)$ . Droite : PSS équatoriale à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  dans les coordonnées  $(r, \tilde{k}_r)$ . Il ne peut physiquement y avoir aucune trajectoire dans les régions blanches au-dessus et en dessous de la zone chaotique.

de modes en correspondance avec les différentes structures de l'espace des phases présentées au paragraphe précédent. Pour une comparaison directe des modes propres avec les trajectoires des rayons, on calcule leurs distributions de Husimi (voir section 2.2.1). La distribution de Husimi est une représentation des modes dans l'espace des phases. Elle est obtenue en projetant un mode propre sur un paquet d'onde Gaussien (Lignières and Georgeot, 2009)

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}}) = \left| \int \Psi'(\mathbf{x}') \exp[-(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)^2 / (2\Delta_x^2)] \exp(i\omega \tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right|^2, \quad (3.43)$$

avec un mode propre  $\Psi'$  et un paquet d'onde Gaussien  $\exp[-(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)^2 / (2\Delta_x^2)] \exp(i\omega \tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}')$  centré en  $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}})$ . La résolution de  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{k}})$  est meilleure à haute fréquence. En effet, la précision sur la position  $\Delta_x$  est reliée à la précision sur le moment  $\Delta_{\tilde{\mathbf{k}}}$  par  $\Delta_x \Delta_{\tilde{\mathbf{k}}} \approx 1/\omega$ . Il reste à projeter la distribution de Husimi, qui est définie sur l'ensemble de l'espace des phases, sur une PSS. Pour cela, on évalue le mode sur la surface  $r = r_{pss}$  (ou bien à l'équateur) et on projette le moment  $\tilde{\mathbf{k}}$  sur le vecteur  $\mathbf{e}_p$  tangent à cette même surface (ou sur le vecteur  $\mathbf{e}_r$ ). Le choix de la PSS surfacique est problématique car cette PSS n'est pas symétrique par rapport à  $\tilde{k}_\theta$ , tandis que la fonction de Husimi 3.43 est symétrique en  $k_\theta$  par construction, ce qui rend le résultat peu lisible (Lignières and Georgeot, 2009). Pour lever toute ambiguïté, nous préférons utiliser la PSS équatoriale qui est symétrique par rapport à  $\tilde{k}_r$ . Cette seconde PSS a toutefois le défaut de ne pas être adaptée pour représenter les distributions de Husimi des modes impairs, qui sont nulles à l'équateur. De plus, nous utilisons de nouvelles données produites à l'occasion de la thèse. Les distributions de Husimi de quatre modes pairs sont représentées sur la Fig. 3.7. On constate que tous les modes sont en effet localisés dans une zone

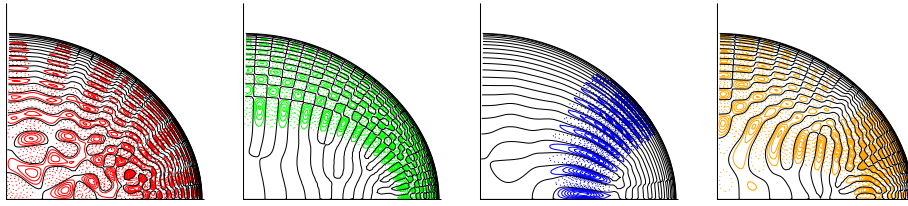


FIGURE 3.6 – Exemples de modes de pression impairs à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ . De gauche à droite : mode chaotique, mode ‘whispering gallery’, mode îlot de période 2, mode îlot de période 6. La pression  $P\sqrt{d/\rho_0}$ , où  $\rho_0$  est la densité du modèle à l’équilibre et  $d$  la distance à l’axe, est représentée par ses courbes de niveaux, en trait plein pour les valeurs positives et en pointillés pour les valeurs négatives.

précise de l’espace des phases. Sur cette base, on peut classer les modes en différentes catégories en les associant aux différents types de trajectoires. On a ainsi des modes whispering gallery, des modes d’îlot et des modes chaotiques. Un exemple de chaque type de mode est illustré sur la Fig. 3.6.

Comme à rotation nulle, les modes d’îlot et les modes whispering gallery ont une structure nodale simple dans le plan méridien décrite par deux nombres quantiques, analogues à l’ordre radial et au degré. Les modes d’îlots peuvent ainsi être vus comme les homologues, à haute rotation, des modes de faible  $\ell$  et les whispering gallery comme les homologues des modes de  $\ell$  élevé. À l’inverse, les modes chaotiques ont une structure nodale complexe. Mais ces modes correspondent asymptotiquement à des rayons de nombre d’onde  $k_\theta$  ayant une valeur moyennement élevée et peuvent s’interpréter comme les homologues des modes de  $\ell$  intermédiaire. Plus précisément, les modes d’îlots de période 2 sont concentrés spatialement autour de l’orbite centrale  $\gamma$ . On peut leur attribuer un ordre radial  $n$  correspondant au nombre de nœuds le long de l’orbite centrale et un degré  $\ell$  correspondant au nombre de nœuds dans la direction transverse à l’orbite centrale. Pour calibrer la résolution des distributions de Husimi, nous avons choisi  $\Delta_x$  de telle sorte que les modes d’îlots de plus bas degré soient bien centrés, sur la PSS, autour du point fixe correspondant à l’orbite centrale.

Aux fréquences considérées, les distributions de Husimi ont une extension importante et ont tendance à s’étaler sur plusieurs zones de l’espace des phases à la fois. Le régime de Berry-Robnik (Berry and Robnik, 1984) n’est donc pas parfaitement satisfait. De plus, les modes ignorent complètement les structures plus fines de l’espace des phases.

### 3.3.4 Spectres d’oscillation réguliers et chaotiques

La projection des modes dans l’espace des phases montre que ceux-ci sont localisés dans des zones dynamiquement indépendantes. Par conséquent, le spectre en fréquence est composé de *sous-spectres* indépendants, qui ont chacun leurs propriétés statistiques propres. Une portion de chaque type de sous-spectre est représentée sur la Fig. 3.8.

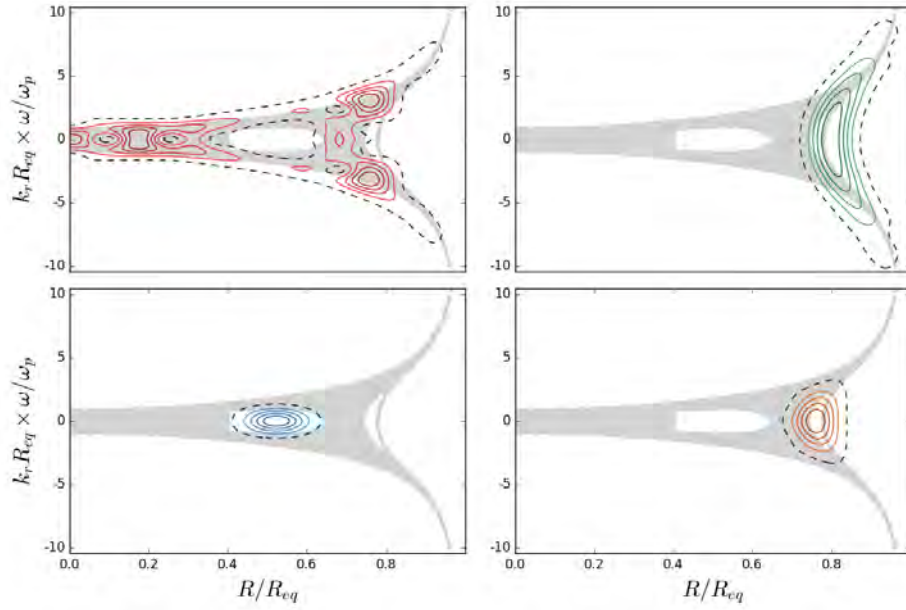


FIGURE 3.7 – Exemples de modes pairs projetés sur la PSS équatoriale (distributions de Husimi). Panneau a) mode chaotique, Panneau b) mode ‘whispering gallery’, Panneau c) mode îlot de période 2 et Panneau d) mode îlot de période 6. Les distributions de Husimi sont représentées par des lignes de niveaux. La ligne de niveau tracée en pointillés contient environ 90 % du mode (valeur obtenue en comparant l’intégrale de la distribution de Husimi à l’intérieur du contour avec l’intégral sur la distribution totale).

Notons qu’aux classes de modes liées à la dynamique s’ajoutent les classes de symétries, axiale et équatoriale, détaillées dans la section 3.2.2. Les spectres associés aux zones quasi-intégrables, i.e. les chaînes d’îlots et ‘whispering gallery’, sont dits réguliers. Percival (1973) fut le premier à employer la notion de régularité à propos des spectres quantiques. Dans Gutzwiller (1990), les spectres réguliers sont caractérisés par l’existence d’une fonction lisse de  $N$  entiers  $f(n_1, n_2, \dots, n_N)$ , avec  $N$  degrés de liberté, qui reproduit les spectres. Une telle fonction existe toujours dans un domaine intégrable de l’espace des phases. Le théorème de Liouville-Arnold assure l’existence d’un système de coordonnées dans lequel le Hamiltonien s’exprime en fonction des intégrales du mouvement. Ce sont les coordonnées angle-action introduites dans la section 2.1.2. L’existence de la fonction  $f(n_1, n_2, \dots, n_N)$  découle ensuite de la quantification des intégrales du mouvement sur les tores. En particulier, les spectres associés aux modes d’îlot peuvent être reproduits par des formules empiriques de la forme  $\omega_{n,\ell} = n\delta_n + \ell\delta_\ell + \alpha$ , où  $n, \ell$  sont des entiers et  $\alpha$  est une constante (Reese et al., 2008; Lignières and Georgeot, 2009). En revanche, il n’est pas possible de construire la fonction  $f(n_1, n_2, \dots, n_N)$  pour les modes chaotiques. On dit que le spectre est irrégulier. Le système dynamique associé étant symétrique par renversement du temps, on attend des modes chaotiques qu’ils suivent la statistique de l’ensemble GOE des matrices aléatoires, en accord avec la conjecture de Bohigas, Giannoni et Schmit (Bohigas et al., 1984). Pour tester cette hypothèse, Lignières et Georgeot ont calculé la distribution cumulée (ou intégrée) des écarts  $\delta_n = (\omega_{n+1} - \omega_n) / \langle \omega_{n+1} - \omega_n \rangle$  entre niveaux proches voisins :  $N(\Delta) = \int_0^\Delta P(\delta) d\delta$ .

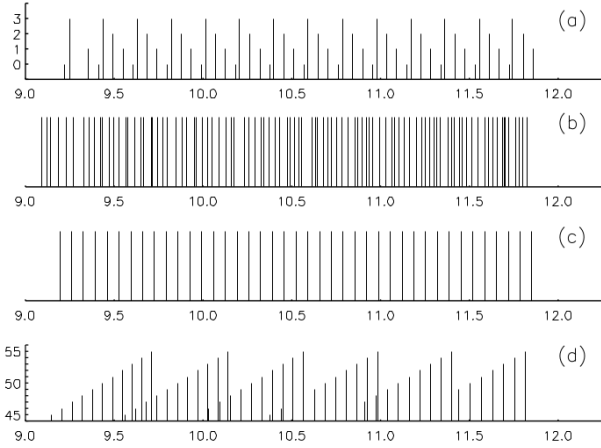


FIGURE 3.8 – Les différents sous-spectres calculés à la rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ , correspondant a) aux modes d’îlots de période 2, b) aux modes chaotiques, c) aux modes d’îlot de période 6 et d) aux modes ‘whispering gallery’. Les nombres entiers parfois affichés en ordonnée correspondent à l’un des nombres quantiques qui caractérisent le mode. La fréquence est exprimée en fonction de  $\omega_p$ . Cette figure est tirée de (Lignières and Georgeot, 2009).

Avec environ 200 modes chaotiques, on obtient un bon accord avec la prédiction de la RMT, comme le montre la Fig. 3.9. Ce résultat est donc bien compatible avec l’hypothèse BGS.

La visibilité des modes dans les données observées dépend de plusieurs facteurs. Il est difficile de prédire a priori quels modes seront excités. En effet, la saturation en amplitude des modes excités par le mécanisme  $\kappa$ , qui est le mécanisme d’excitation dominant dans les pulsateurs classiques (voir section 1.1.2), est un phénomène non-linéaire encore mal compris. On sait toutefois que les effets d’atténuation de la visibilité dus à l’intégration sur le disque stellaire jouent un rôle crucial dans la visibilité des modes observés. Parmi les quatre classes de modes, les ‘whispering gallery’ sont les plus sensibles à cette atténuation, puisqu’ils ont beaucoup de nœuds en surface. À l’inverse, les modes d’îlot de période 2 et les modes chaotiques sont les plus visibles (des calculs plus complets sur les visibilités dans les étoiles à rotation rapide, prenant notamment en compte l’assombrissement gravitationnel, ont été effectués dans Reese et al 2013). Ce constat a motivé un approfondissement des recherches sur la structure asymptotique de ces deux types de modes. Nous allons brièvement résumer les résultats obtenus par Michael Pasek pendant sa thèse au sujet des modes d’îlots (Pasek, 2012). Le travail effectué au sujet des modes chaotiques, dans le cadre de la présente thèse, sera exposé en détail dans le chapitre suivant.

Le spectre asymptotique des modes d’îlots étant régulier, une formule asymptotique pour les fréquences, du même type que la formule de Tassoul, a pu être dérivée. Pour cela, la méthode de l’équation parabolique (Babic and Buldyrev, 1972) a été utilisée. Le principe est de se ramener à une équation d’onde valide au voisinage de l’orbite centrale  $\gamma_c$  de l’îlot, puis de rechercher des solutions sous la forme de paquets d’onde Gaussiens. On peut alors poser des conditions de quantifications sur la phase de ces



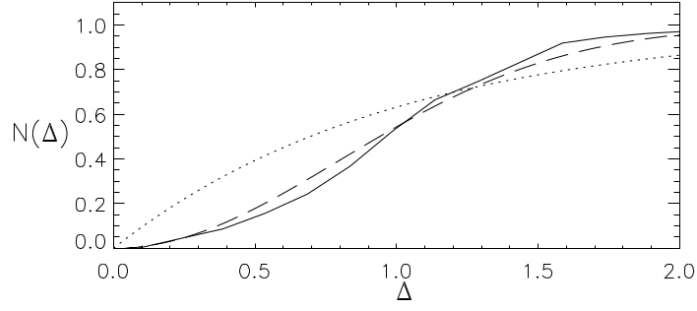


FIGURE 3.9 – Intégrale de la distribution des écarts entre fréquences voisines  $N(\Delta) = \int_0^\Delta P(\delta)d\delta$ . Les données numériques sont représentées en trait plein, avec environ 200 fréquences. La distribution *GOE* en pointillés-tirés et la distribution de Poisson en pointillés. Figure tirée de [Lignières and Georgeot \(2009\)](#).

solutions approchées pour obtenir la structure du spectre en fréquence

$$\omega_{n,\ell,m} = \delta_n(m)n + \delta_\ell(m)\ell + \beta(m), \quad (3.44)$$

avec

$$\delta_n = \frac{2\pi}{\oint \frac{ds}{\tilde{c}_s}}, \quad \delta_\ell = \frac{2\pi N_r + \alpha}{\oint \frac{ds}{\tilde{c}_s}}, \quad \beta = \frac{1}{2}(\delta_n + \delta_m), \quad (3.45)$$

où  $ds$  est l'abscisse curviligne le long de  $\gamma_c$ ,  $\alpha$  est la phase de Floquet et  $N_r$  est le nombre d'enroulement autour de  $\gamma_c$  d'une trajectoire voisine au cours d'une période. La dépendance en  $m$  est implicite, elle intervient à travers la vitesse du son renormalisée  $\tilde{c}_s$  et le chemin  $\gamma_c(m)$ . Les entiers  $n$  et  $\ell$  correspondent respectivement au nombre de nœuds le long de l'orbite  $\gamma_c$  et dans la direction transverse à  $\gamma_c$ . Ils sont reliés à l'ordre radial  $n_s$  et au degré  $\ell_s$  à rotation nulle par les relations suivantes ([Reese et al., 2008](#))

$$n = 2n_s + \epsilon, \quad (3.46)$$

$$2\ell + \epsilon = \ell_s - |m|, \quad (3.47)$$

$$m = m_s, \quad (3.48)$$

où  $\epsilon = (\ell + m) \bmod 2$  vaut zéro pour les modes pairs et un pour les modes impairs. Ces formules ont été établies en suivant l'évolution de modes de faible ordre radial avec la rotation. Elles retranscrivent la manière dont les nœuds se réarrangent sous l'effet de la rotation. Les nœuds des modes d'ilot s'organisent suivant une orbite qui relie deux points de la surface. Dans le cas à symétrie sphérique, on compte les nœuds depuis le centre du polytrophe (et non pas e.g. entre deux pôles), ce qui explique le facteur deux entre  $n$  et  $n_s$ , auquel il faut ajouter un nœud situé sur l'équateur si le mode est impair. La théorie présentée dans [Pasek et al. \(2011\)](#) est dérivée en supposant que les fréquences sont asymptotiques et que les tores sur lesquels sont construits les modes d'oscillation sont proches de l'orbite périodique centrale (c'est une théorie locale). Les tores à proximité immédiate de l'orbite centrale correspondent aux modes de bas degré  $\ell$ . On peut donc mettre en parallèle cette condition avec le régime de validité de la

formule de Tassoul ( $n \gg \ell$ ).

Quand la rotation est infinitésimale l'écart  $\delta_n$  tend vers  $\Delta/2$ , où  $\Delta$  désigne la grande séparation de la formule de Tassoul. Dans cette thèse, nous ferons parfois référence à *la grande séparation des modes d'ilots*, que nous définissons comme  $\Delta_i = 2\delta_n$ . Il s'agit de l'écart en fréquence  $\omega_{n+2,\ell,m} - \omega_{n,\ell,m}$  entre deux modes d'ilots de même parité. Le facteur  $1/2$  entre  $\Delta = 2\pi/(2 \int_0^R dr/c_s)$  et  $\delta_n = 2\pi/\oint_{\gamma_c} ds/\tilde{c}_s$  provient du fait que l'orbite  $\gamma_c$  doit compléter un aller-retour entre deux points de la surface avant de boucler sur elle-même.

La méthode de l'équation parabolique a l'avantage de donner également une expression approchée de l'amplitude des modes. La comparaison avec les spectres calculés numériquement par le programme TOP permet de vérifier la validité de l'approximation. Sur un intervalle allant de la rotation nulle à  $\Omega/\Omega_k = 0.60$ , un très bon accord a été trouvé entre les valeurs de  $\delta_n$  et  $\delta_\ell$  obtenus par l'approximation asymptotique et les valeurs  $\delta_n^{\text{num}} = \omega_{n+1,\ell,m} - \omega_{n,\ell,m}$  et  $\delta_\ell^{\text{num}} = \omega_{n,\ell+1,m} - \omega_{n,\ell,m}$  pour des modes d'ordre radial élevé  $n \in [42, 51]$ . Notons que l'approximation échoue autour de  $\Omega/\Omega_k = 0.26$ , au moment de la bifurcation. Pour les valeurs de  $m$  non nulles, l'orbite centrale ne subit pas de bifurcation et l'approximation est valide à toutes les valeurs de la rotations.

## Chapitre 4

# Étude semiclassique des modes de pression chaotiques

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Calcul et identification des modes chaotiques à hautes fréquences . . . . .</b>	<b>74</b>
4.1.1	Constitution d'une base de données . . . . .	74
4.1.2	Présentation des données . . . . .	82
<b>4.2</b>	<b>Analyse semiclassique . . . . .</b>	<b>85</b>
4.2.1	Méthodes du chaos quantique pour les oscillations acoustiques	87
4.2.2	Effet du profil inhomogène de la vitesse du son sur les orbites périodiques . . . . .	90
4.2.3	Impact sur la statistique spectrale . . . . .	92
<b>4.3</b>	<b>Pics additionnels et barrières partielles . . . . .</b>	<b>97</b>
<b>4.4</b>	<b>Le spectre à basses fréquences . . . . .</b>	<b>99</b>

---

Le travail présenté dans ce chapitre est un prolongement de l'étude numérique et semiclassique des modes de pression de hautes fréquences des étoiles en rotation rapide, commencée par [Lignières and Georgeot \(2008, 2009\)](#) et poursuivie par [Pasek et al. \(2011, 2012\)](#). Le point de départ de cette thèse est une statistique intrigante dans les données de [Lignières and Georgeot \(2009\)](#), à savoir la présence de pics dans l'auto-corrélation du spectre des modes chaotiques calculés à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ . Ces pics sont intéressants pour deux raisons. Du point de vue du chaos quantique, ils constituent une déviation par rapport à la loi de distribution suivie par les matrices GOE, qui modélise usuellement les spectres chaotiques. Du point de vue de l'astérosismologie, ces pics suggèrent que des écarts réguliers existent non seulement dans le spectre des modes d'ilot, mais aussi dans le spectre des modes chaotiques. Il est donc intéressant de pousser plus loin l'étude de ces modes. D'abord par une analyse numérique pour savoir si la présence de ces pics se confirme à d'autres valeurs de la rotation. Mais aussi par une analyse asymptotique pour comprendre l'origine de ces pics surprenants et relier ces observables potentielles aux propriétés physiques des intérieurs stellaires.

L'analyse du comportement asymptotique des modes chaotiques réalisée au cours de cette thèse a fait l'objet d'une publication dans le journal *Europhysics Letters* (Publication I) et un second article a été soumis dans le journal *Astronomy and Astrophysics* (Publication II). Ces deux articles sont reproduits à la fin du manuscrit. La première publication présente une explication basée sur la théorie des orbites périodiques pour expliquer la présence de pics dans les autocorrélations. Nous montrons que l'inhomogénéité de la vitesse du son, qui décroît fortement en surface, est à l'origine de l'apparition d'un pic dans l'autocorrélation. De plus, nous retrouvons quantitativement la position du pic à plusieurs valeurs de la rotation à partir du calcul des temps de parcours des trajectoires chaotiques du système. Nous interprétons ce pic comme une grande séparation. Dans la seconde publication nous faisons une revue des propriétés générales des modes chaotiques en vue des applications à l'astérosismologie. Nous effectuons en particulier une étude plus systématique des régularités en produisant des diagrammes échelle (voir section 4.1.2) qui servent de base à une comparaison précise entre l'organisation du spectre des modes chaotiques et l'organisation du spectre des modes d'îlot.

Dans ce chapitre, nous résumons les résultats présentés dans ces deux articles en insistant sur certains aspects. La première section précise la manière dont nous avons produit numériquement les spectres chaotiques. Dans la seconde section, nous dérivons, dans le cadre de la théorie des orbites périodiques, une expression semiclassique approchée de la fonction d'autocorrélation. Cette expression fait intervenir les temps de parcours des trajectoires chaotiques entre deux rebonds à la surface. Nous montrons qu'elle prédit pour différentes valeurs de la rotation un pic dans l'autocorrélation, dont la position peut s'interpréter comme la grande séparation. La troisième section montre que la présence de structures dans la zone chaotique de l'espace des phases, appelées *barrières partielles*, peut être à l'origine de corrélations supplémentaires dans le spectre. Enfin dans une dernière section nous présentons une première étude des propriétés du spectre chaotique dans le domaine des basses fréquences, pour se rapprocher de celui des pulsateurs stellaires.

## 4.1 Calcul et identification des modes chaotiques à hautes fréquences

Un des enjeux de la thèse a été la constitution d'une base de données numériques de modes chaotiques, dont nous présentons quelques exemples sur la Fig. 4.1. Cette section présente la méthode que nous avons utilisée pour calculer numériquement et identifier un grand nombre de modes chaotiques. Dans un deuxième temps, nous regarderons les propriétés statistiques des spectres de fréquence produits numériquement en calculant les autocorrélations et en représentant les spectres sur des diagrammes échelles.

### 4.1.1 Constitution d'une base de données

Notre objectif est de constituer une base de fréquences et de modes propres chaotiques. Nous voulons calculer un grand nombre de fréquences pour plusieurs valeurs de la rotation. La résolution spatiale nécessaire pour le calcul de modes de haute fréquence est élevée et cela se traduit par des besoins importants en mémoire vive, dont on doit

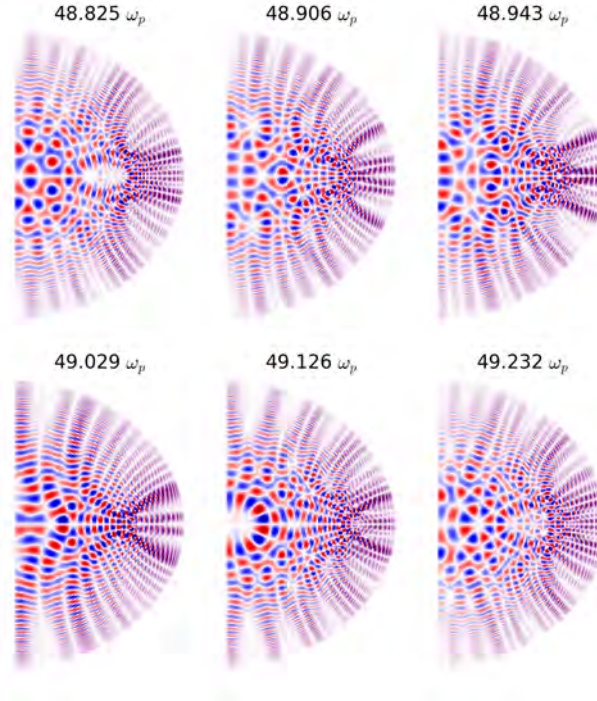


FIGURE 4.1 – Six modes chaotiques impairs de très haute fréquence.  
Figure adaptée de la publication II.

tenir compte. Un autre aspect du problème est de distinguer les modes chaotiques des autres types de modes et nous verrons comment la dynamique des rayons peut aider à cette classification.

## Étude préliminaire

Connaitre les différentes familles de modes propres présentes dans le spectre est un prérequis nécessaire pour pouvoir identifier les modes propres d'oscillation. Si on veut étudier un type de mode bien précis, dans notre cas les modes chaotiques, il faut choisir une gamme de rotations et de fréquences où ces modes seront a priori présents. Cela passe par une étude préliminaire, basée sur le tracé de rayons, qui consiste à construire des sections de Poincaré à plusieurs valeurs de la rotation et de la fréquence. Nous reprenons la PSS introduite dans [Lignières and Georgeot \(2009\)](#) définie à distance constante de la surface et la PSS introduite dans [Pasek \(2012\)](#) confondue avec l'équateur. Dans les deux cas, nous utilisons les coordonnées renormalisées par la fréquence  $(\theta, \tilde{k}_\theta)$  et  $(r, \tilde{k}_r)$  car ce choix de coordonnées permet d'explorer plus efficacement l'espace des paramètres, en ne variant que la rotation.

Le nombre total de modes en dessous d'une fréquence  $\omega$  est donné par le terme de Weyl  $\bar{N}(\omega)$ . Ce dernier prend la forme suivante ([Lignières and Georgeot, 2009](#))

$$\bar{N}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} - \frac{L_z^2}{(r \sin \theta)^2} \right) dS, \quad (4.1)$$

où  $S$  est la portion du plan méridien où l'intégrande est positive. Dans un billard, le terme de Weyl en énergie  $\bar{N}(E)$  croît linéairement et proportionnellement à la surface (voir section 2.2.3). Dans une étoile, ce terme ne croît pas linéairement en fréquence. En

factorisant par  $\omega^2$ , puis en remarquant que  $1 - \omega_c^2/\omega^2$  est proche de 1 dans tout le plan méridien, on voit que  $\bar{N}$  est pratiquement une fonction quadratique de la fréquence. Pour les modes non axisymétriques un second terme, faisant intervenir  $L_z$ , apporte une correction négative tendant à diminuer  $\bar{N}$ . Elle correspond à la réduction du volume occupé par les trajectoires dans l'espace des phases quand  $L_z \neq 0$ . Notons que la correction tend vers zéro quand la fréquence tend vers l'infini. Asymptotiquement, on s'attend ainsi à une croissance quadratique du nombre de modes et donc une croissance linéaire de la densité de modes  $d(\omega) = d\bar{N}/d\omega$ .

Pour déterminer le nombre de modes d'une catégorie donnée, il faut intégrer l'Éq. 4.1 sur la région correspondante de l'espace des phases. Ainsi le nombre de modes chaotiques (ou leur densité) est d'autant plus grand que la zone chaotique est développée et que les fréquences sont élevées. Comme le montre la Fig. 4.2, où est montrée la zone chaotique centrale, la taille de la zone chaotique augmente rapidement avec la rotation. On s'attend ainsi à une augmentation de la densité de modes chaotiques avec la rotation. On peut aussi comparer les évolutions conjointes de l'aire de la zone chaotique et de l'aire de l'îlot central (voir Fig. 4.3). On constate qu'au contraire de la zone chaotique l'évolution de l'îlot central n'est pas monotone. En particulier, sa taille diminue fortement autour de  $\Omega/\Omega_k = 0.682$ , ce qui signifie qu'à cette rotation les modes d'îlot sont beaucoup moins nombreux dans le spectre que les modes chaotiques<sup>1</sup>.

Les plus hautes fréquences accessibles au calcul numérique dépendent directement de la mémoire vive disponible (car les besoins en mémoire augmentent avec la résolution numérique). Le choix de la gamme de rotation est en revanche dépendant de l'évolution de l'espace des phases constaté sur la Fig. 4.2. Aux rotations les plus basses, il n'existe qu'une mince bande chaotique piégée entre les tores KAM. Les modes chaotiques dans cette bande se forment à des fréquences difficiles à atteindre numériquement et inaccessibles dans les étoiles. Autour de  $\Omega/\Omega_k = 0.32$ , de nombreuses structures intégrables coexistent avec la zone chaotique, ce qui complique l'analyse du spectre. Nous avons donc choisi de travailler à des rotations supérieures à  $\Omega/\Omega_k = 0.481$  où la zone chaotique est bien développée et contient seulement une ou deux chaînes d'îlots.

## Production des modes

Pour le calcul numérique des modes propres, nous utilisons le programme TOP décrit dans la section 3.2.2. Les modes sont calculés par des méthodes spectrales. Numériquement, ils sont décomposés suivant l'Éq. 3.29, en utilisant un nombre fini de polynômes de Chebyshev et d'harmoniques sphériques  $N_r$  et  $N_t$ . Ces deux nombres définissent la résolution des modes. Un exemple de décomposition spectrale d'un mode whispering gallery est montré sur la Fig. 4.4. La résolution a un impact direct sur le coût des calculs, puisque les matrices dont on cherche quelques valeurs propres par la méthode d'Arnoldi-Chebyshev sont de taille  $(N_r \times N_t)^2$ . La résolution doit en principe être déterminée par la plus petite échelle de variation de l'amplitude du mode. Elle

1. Quand nous disons que les modes d'îlot sont moins nombreux, cela ne signifie pas qu'il manque des modes mais plutôt qu'on ne trouve dans le spectre que les îlots de bas degré  $\ell$ , pour une gamme de fréquence donnée.

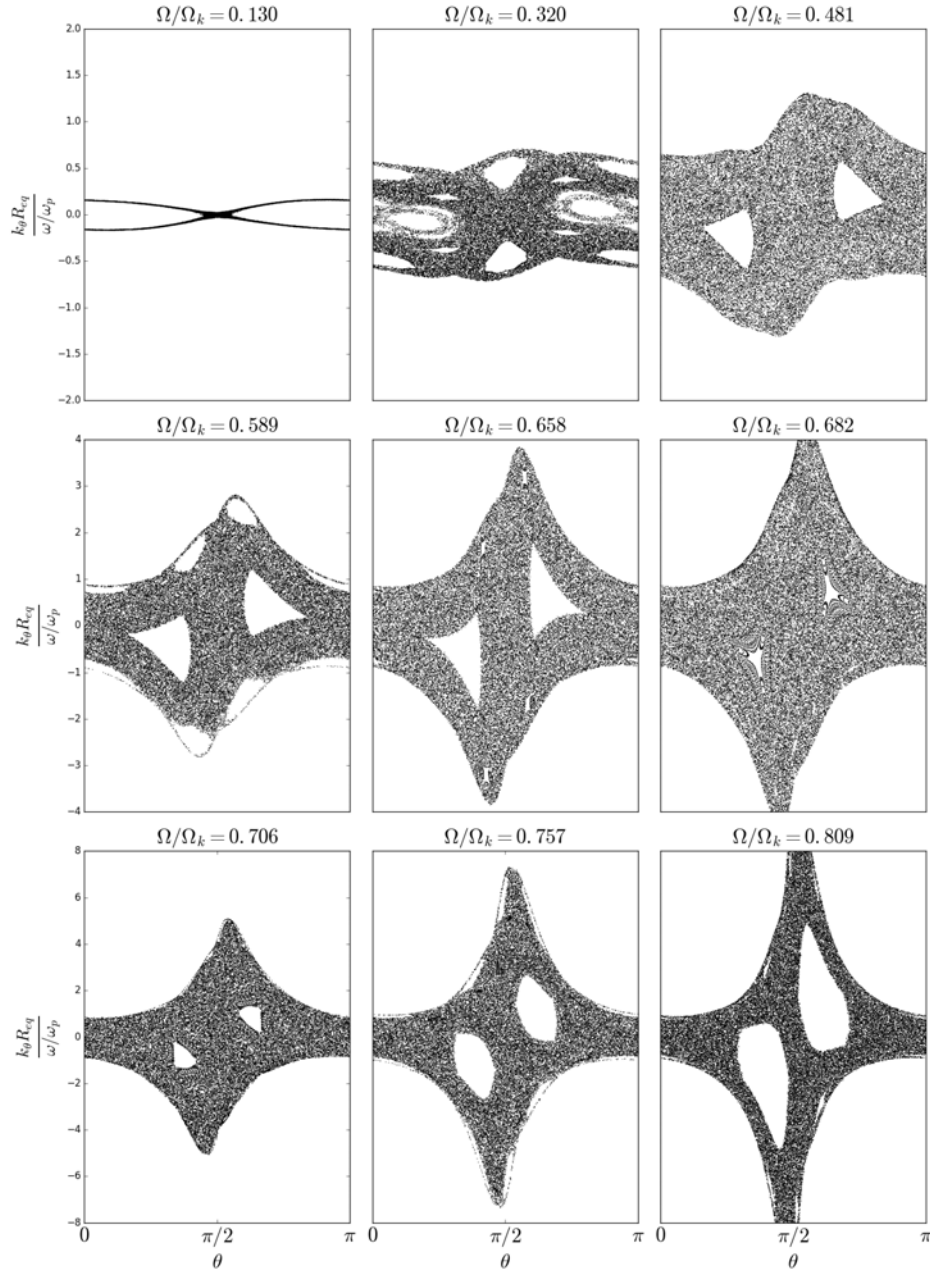


FIGURE 4.2 – Évolution de la zone chaotique centrale avec la rotation, vue sur la section de Poincaré à faible distance de la surface. Cette évolution est qualitativement similaire, au-delà du régime perturbatif décrit par le théorème KAM, à celle de l'application standard lorsque l'intensité de la pulsation augmente. De la même façon, la destruction progressive des tores KAM permet aux zones chaotiques de s'accroître (notons que dans le cas stellaire ce sont les tores qui sont proches de la surface qui survivent le plus longtemps à la rotation, comme dans les billards).

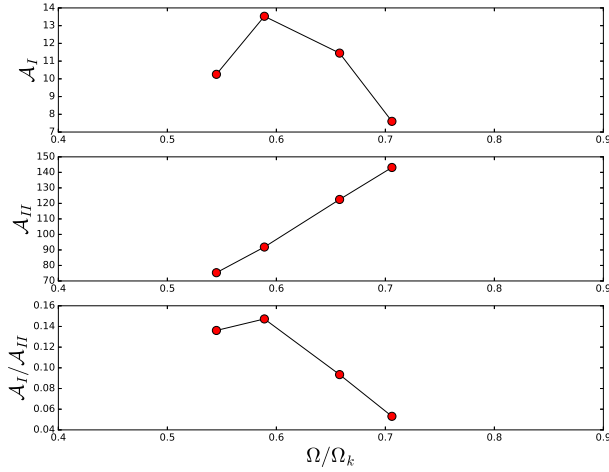


FIGURE 4.3 – Évolution des aires  $\mathcal{A}_I$ ,  $\mathcal{A}_{II}$  et  $\mathcal{A}_I/\mathcal{A}_{II}$  avec la rotation, où  $\mathcal{A}_I$  est l'aire de l'îlot central et  $\mathcal{A}_{II}$  est l'aire de la zone ergodique.

dépend donc des valeurs maximales de  $\tilde{k}_r$  et  $\tilde{k}_\theta$ . La Fig. 4.2 montrent que la zone chaotique s'accroît rapidement avec la rotation, à la fois en  $\tilde{k}_r$  et en  $\tilde{k}_\theta$ . Dans l'espace des phases, la zone chaotique centrale est bornée par des trajectoires de type 'whispering gallery'. Ainsi nous pourrions facilement garantir que tous les modes chaotiques sont bien résolus si quelques modes whispering gallery sont résolus pour les valeurs fixées de  $N_r$  et  $N_t$ . Pour explorer une large gamme de rotations, nous avons considéré les résolutions suivantes :  $N_r = 96, 128, 140$  et  $N_t \leq 185$ .

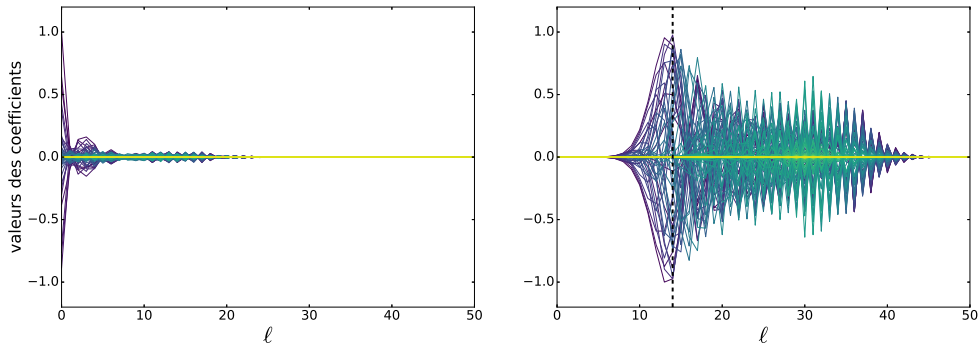


FIGURE 4.4 – Projection sur les polynômes de Legendre d'un mode chaotique de fréquence  $\omega = 29.59\omega_p$  (panneau de gauche) et d'un mode whispering gallery de fréquence  $\omega = 29.75\omega_p$  (panneau de droite) à la rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.481$ . Chaque courbe correspond à une valeur de l'indice  $j$  des polynômes de Chebyshev. La décroissance des coefficients spectraux est beaucoup plus rapide pour le mode chaotique. La ligne verticale en pointillés marque la valeur du degré dominant  $\ell_{max}$ . Pour le mode chaotique, on a  $\ell_{max} = 0$ .



## Sélection des modes chaotiques

Au sein de la base de données que nous avons produite, nous avons dû identifier les modes chaotiques. Notre approche consiste à identifier les modes réguliers, puis à retirer les fréquences correspondantes du spectre global. Il est possible d'identifier un grand nombre de modes réguliers avec certitude et de manière automatique ou semi-automatique. C'est le cas de la majorité des modes whispering gallery, des modes d'îlot de période 6 et des modes d'îlot de période 2 de bas degré,  $\ell = 0, 1, 2$ .

Parmi les différents types de modes, les modes whispering gallery sont ceux qui sont dominés par les harmoniques sphériques de plus haut degré. En moyennant les coefficients spectraux  $a_j^\ell$  sur les polynômes de Chebyshev, on peut définir le *degré dominant*  $\ell_{max}$  d'un mode. Un exemple de décomposition spectrale est montré sur le panneau de droite de la Fig. 4.4 pour un mode whispering gallery, avec une indication du degré dominant. Pour chaque rotation, il existe une valeur critique de  $\ell_{max}$  au-dessus de laquelle tous les modes sont de type whispering gallery (voir Publication II, figure 4). Une fois que la valeur seuil de  $\ell_{max}$  a été trouvée, nous pouvons extraire automatiquement une grande majorité des modes whispering gallery.

Les spectres associés aux modes d'îlot sont décrits par des formules simples qui font intervenir un ou deux nombres quantiques (voir Éq. 3.44 pour les modes d'îlot de période 2). La connaissance de ces formules s'avère suffisante pour identifier les modes d'îlot de période 6, ainsi que les modes d'îlot de période 2 de bas degré.

Néanmoins, tous les modes ne peuvent pas être identifiés automatiquement. C'est le cas de certains whispering gallery qui ont un  $\ell_{max}$  inférieur à la valeur seuil, ou encore de modes d'îlot qui ne suivent pas la régularité attendue dans le régime asymptotique. Ce deuxième cas a deux origines possibles bien connues. Les croisements évités entre deux modes appartenant à une même classe de symétrie, ou le fait que les fréquences sont trop basses pour suivre précisément la formule asymptotique.

Occasionnellement, un mode d'îlot et un mode chaotique se rapprochent suffisamment en fréquence pour se repousser. Si ce type de croisement évité se produisait fréquemment et avec intensité (i.e. avec un déplacement important de la fréquence du mode d'îlot), la régularité en serait affectée. Ils sont heureusement plutôt rares, et leur impact sur les fréquences est faible<sup>2</sup>.

Dans les domaines de fréquences que nous avons étudiés, nous constatons néanmoins que certains modes d'îlot sont difficiles à identifier et que cela se produit quand le degré est élevé ( $\geq 3$ ) et l'ordre radial petit. Cette difficulté d'identification est attendue dans la mesure où on ne se situe pas strictement dans le régime asymptotique de Berry-Robnik où tous les modes sont associés sans ambiguïté à une structure invariante de l'espace des phases (Berry and Robnik, 1984). Pour évaluer la distance qui nous sépare du régime de Berry-Robnik, les distributions de Husimi sont très parlantes.

Sur la Fig. 3.7, nous avons illustré le cas des modes bien localisés dans l'espace des phases. De tels modes sont identifiables sans ambiguïté. Mais il existe aussi des modes dont la distribution de Husimi est à cheval sur plusieurs zones, particulièrement à basse fréquence. Nous les appelons *modes d'interface*. Ils viennent en deux catégories, les

2. L'effet des croisements évités se fait davantage ressentir sur les modes pairs (Lignières et al., 2006)

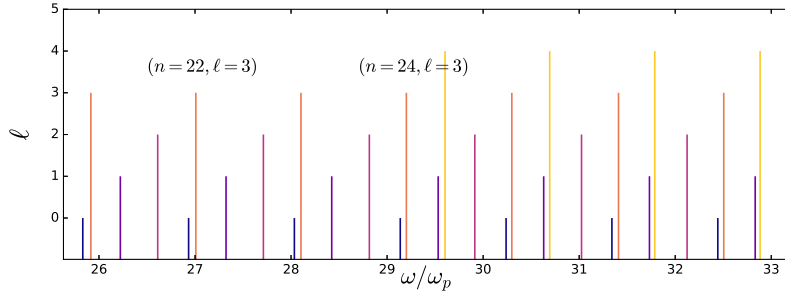


FIGURE 4.5 – Fréquences de quelques modes d'îlot pairs à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ .  
L'ordonnée indique le degré  $\ell$  des modes.

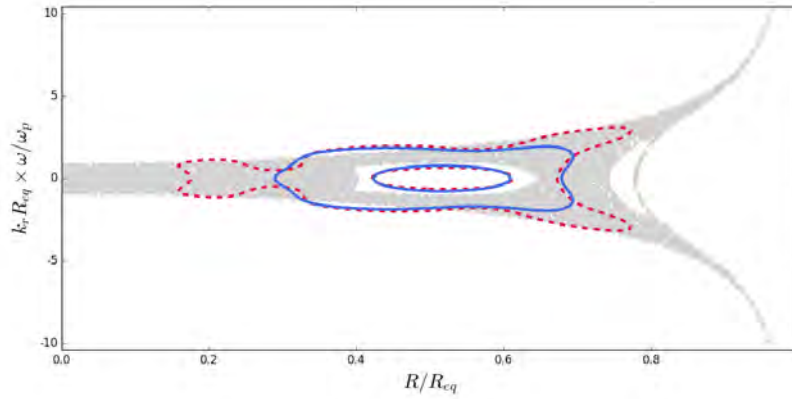


FIGURE 4.6 – Distributions de Husimi représentant deux modes d'interface chaos/îlots à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ . Pour pouvoir comparer les deux distributions, nous avons représenté uniquement les contours extérieurs qui contiennent 70% de la distribution (valeur obtenue en comparant l'intégrale de la distribution de Husimi à l'intérieur du contour à l'intégrale sur la distribution totale). Le contour rouge (en pointillés) correspond au mode  $(n = 22, \ell = 3)$  et le contour bleu (trait plein) correspond au mode  $(n = 24, \ell = 3)$ . On constate que le mode de plus haute fréquence est concentré autour de l'îlot.

modes chaos / whispering gallery et les modes chaos / îlots. Les modes d'interface ont des propriétés intermédiaires entre deux catégories de modes bien définis. Ils rendent ainsi plus complexe l'identification des modes. Prenons l'exemple de la portion de spectre représentée sur la Fig. 4.5, où l'on n'a représenté que les modes identifiés comme des îlots. Le mode de fréquence  $\omega = 27.008\omega_p$  a été identifié comme un mode d'îlot ( $n = 22, \ell = 3$ ). Pourtant, sa distribution de Husimi (Fig. 4.6, courbe en pointillés) révèle que le mode empiète sur une partie importante de l'îlot central mais aussi de la zone chaotique. C'est le positionnement du mode dans le spectre qui nous a permis de l'identifier comme un mode d'îlot. Le mode ( $n = 24, \ell = 3$ ) est davantage centré autour de l'îlot dans l'espace des phases (voir Fig. 4.6, courbe en trait plein). Ce n'est qu'à plus haute fréquence que les modes de degré  $\ell = 3$  entrent complètement dans l'îlot central. La transition entre les modes d'interface chaos/îlot et les modes d'îlot bien définis est décrite dans la publication II, section 3.2.1. Lorsque nous avons rencontré un mode d'interface, nous avons fait le choix de le ranger avec les modes d'îlot, afin de ne pas introduire, dans notre base de donnée de modes chaotiques, des régularités attribuables aux modes d'îlot.<sup>3</sup>

Concernant les modes d'interface à tendance whispering gallery, nous les avons identifiés à l'aide d'une règle simple. Si l'amplitude du mode est importante autour d'une caustique interne, alors le mode n'est pas considéré comme chaotique. Notons qu'à la rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ , l'îlot de période 6 est très proche, dans l'espace des phases, de la zone des whispering gallery. Du point de vue des distributions de Husimi, les modes d'interface sont souvent à cheval sur trois zones simultanément : la zone chaotique, l'îlot de période 6 et les whispering gallery. En termes d'amplitude, ces modes sont difficilement discernables des îlots de période 6. C'est au final l'étude des régularités qui permet de les séparer.

Pour résumer, nous nous trouvons dans un régime de fréquences particulier, qui est bas du point de vue de la physique semiclassique, mais élevé du point de vue de l'astrophysique. En effet, les fréquences recensées dans la table 4.1 sont plus élevées que les fréquences observées dans les étoiles en rotation rapide comme les  $\delta$  Scuti. Elles sont également plus élevées que les fréquences numériques exploitées dans Lignières and Georgeot (2009)<sup>4</sup>

Nous avons produit une base de données numériques de modes chaotiques pour six valeurs de la rotation. Les caractéristiques de chacun des spectres calculés sont répertoriées dans la table 4.1. On y donne la classe de symétrie, le nombre de modes et le domaine de fréquences. La classe de symétrie est dénotée  $m^\pm$  où  $m$  est le nombre quantique azimutal, et les symboles « + » et « - » désignent respectivement les modes pairs et impairs. On peut constater que les intervalles de fréquences considérés diminuent avec la rotation. En effet, la fréquence d'un mode normalisée à  $\omega_p$  diminuant avec la

3. Jusqu'à un stade avancé de la thèse, nous disposions uniquement des distributions de Husimi projetées sur la PSS à distance constante de la surface. Sur cette PSS, les distributions de Husimi des modes chaotiques ne remplissent pas toute la zone ergodique ce qui complique l'identification. Cela est peut-être dû au fait que cette section est proche de la surface, où les modes semblent localement réguliers. Pour discerner les modes chaotiques des modes d'interface à tendance îlot, nous nous basions alors sur l'étude des régularités.

4. Les fréquences exploitées dans Lignières and Georgeot (2009) à la rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  étaient comprises entre  $30.00\omega_p$  et  $33.56\omega_p$ , où  $\omega_p = (GM/R_p^3)^{1/2}$  et  $R_p$  est le rayon polaire.

TABLE 4.1 – Description des spectres chaotiques calculés numériquement. La classe de symétrie est notée  $m^\pm$  (où  $m$  est le nombre quantique azimuthal, l'exposant  $+$  désigne les modes pairs et  $-$  les modes impairs). Table tirée de la publication II.

Classe de symétrie	Rotation ( $\Omega/\Omega_k$ )	Nombre de modes	Fréquences ( $\omega/\omega_p$ )
$0^-$	0.481	206	28.35 - 46.89
$0^-$	0.545	223	28.15 - 44.09
$0^-$	0.589	217	26.02 - 40.29
$0^-$	0.658	207	36.37 - 44.89
$0^-$	0.706	283	23.57 - 36.22
$0^-$	0.809	170	24.02 - 30.01
$0^+$	0.545	105	38.01 - 44.06
$0^+$	0.589	96	30.52 - 36.60
$0^+$	0.658	120	36.40 - 41.25
$1^-$	0.589	125	30.51 - 38.48
$4^-$	0.589	93	30.53 - 38.51

rotation du fait de l'augmentation du volume de l'étoile, les mêmes gammes d'ordre radiaux sont atteintes pour des valeurs plus faibles de  $\omega/\omega_p$  à hautes rotations.

En résumé, l'identification des modes calculés numériquement ne peut pas s'effectuer de manière complètement automatique. C'est une limitation importante, qui nous a contraint à produire des données pour un nombre relativement faible de valeurs de la rotation. Récemment, des méthodes de *machine learning* ont été utilisées pour reconnaître les modes d'îlot de manière automatique sur un grand nombre de modèles d'étoiles (Mirouh et al., 2019). Ce genre de méthodes pourra être étendu à la reconnaissance des modes chaotiques. La base de donnée de modes chaotiques que nous avons produite sera très utile dans ce cadre, puisque la méthode d'apprentissage est supervisée c'est-à-dire qu'elle requiert un échantillon de données déjà étiquetées.

### 4.1.2 Présentation des données

Nous commencerons par calculer la statistique des proches voisins pour les spectres chaotiques (voir section 2.2.4) et nous obtiendrons un très bon accord avec la prédiction donnée par la théorie des matrices aléatoires. Nous calculerons ensuite les autocorrélations pour ces mêmes spectres. De manière surprenante, nous distinguons clairement des pics dans les autocorrélations qui ne sont pas modélisés par la théorie des matrices aléatoires. Nous représenterons finalement les spectres sur un diagramme échelle et montrerons qu'il existe un écart régulier s'interprétant comme une grande séparation.

## Statistique des proches voisins

Nous avons calculé la distribution  $P(s')$  des écarts entre niveaux proches voisins pour chacun des spectres de la table 4.1. Si les modes que nous avons identifiés sont bien chaotiques, on s'attend à ce que ces spectres suivent la statistique de GOE. À l'inverse si des modes réguliers se glissent dans les données, par exemple des modes d'îlot de

degré élevé, alors on obtient une superposition de sous-spectres et on se rapproche d'une statistique Poissonienne.

La distribution  $P(s')$  permet de distinguer très facilement ces deux situations. En effet elle s'annule à l'origine dans le cas GOE tandis qu'elle vaut 1 dans le cas Poissonien (voir fig. 2.8). Pour la plupart des spectres de la table 4.1, l'accord obtenu avec la distribution GOE est très bon comme le montre la Fig. 7 de la publication II<sup>5</sup>. Ce résultat confirme que la base de données de modes chaotiques a été correctement constituée. Toutefois, les spectres ( $m = 0$ ,  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ ) n'est pas en accord avec la prédiction GOE, comme le montre la Fig. 4.7 où nous avons calculé la distribution intégrée  $N(s) = \int_0^s P(s')ds'$  où l'on voit que la distribution du spectre à  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  est intermédiaire entre le cas GOE et le cas Poissonien. Une telle statistique est un signe que le spectre est une superposition d'au moins deux sous-spectres. Ainsi, à cette rotation, le spectre est une superposition d'au moins deux sous-spectres.

Nous pensons que l'origine de ce phénomène est l'apparition de barrières partielles piégeant les trajectoires chaotiques dans un domaine entourant l'îlot central. De telles structures peuvent former des modes dans une sous partie de la zone chaotique (Shim et al., 2011). Les domaines piégeant les trajectoires sont particulièrement grands, relativement à la taille de la zone chaotique, à  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  (voir la section 4.3). Le spectre non-axisymétrique ( $m = 4$ ,  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ ) est lui aussi plus proche de la statistique de Poisson que de la statistique GOE. Nous n'avons pas mené d'étude approfondie sur les barrières partielles dans le cas non-axisymétrique. Toutefois, nous suspectons que la réduction de la zone chaotique qui a lieu lorsque la projection  $\tilde{L}_z$  du moment angulaire augmente la proportion de modes formés par les barrières partielles.

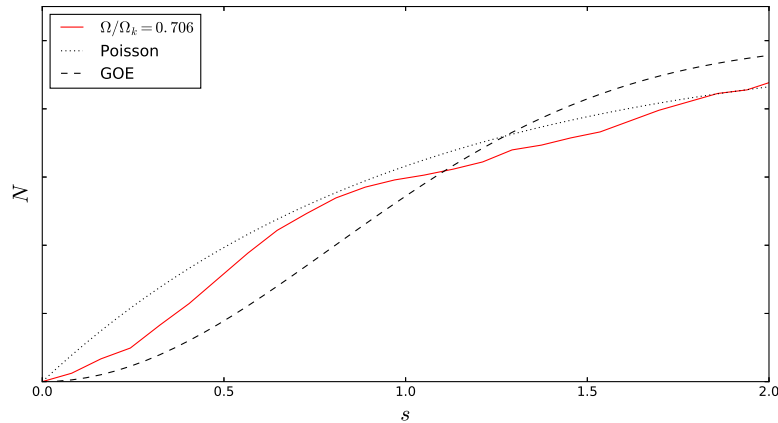


FIGURE 4.7 – Distribution des écarts intégrée :  $N(s) = \int_0^s P(s')ds'$  pour deux valeurs de la rotation. La distribution est proche du cas Poissonien pour  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ . Cela indique que le spectre chaotique à cette rotation est une superposition de sous-spectres indépendants.

5. Voir aussi la Fig. 2 de la publication I, où nous calculons une distribution similaire à  $P(s')$  introduite dans Oganessian and Huse (2007); Atas et al. (2013).

## Autocorrélations et diagrammes échelle

L'autocorrélation est définie comme

$$R_2(\xi) = \int d\omega d(\omega - \xi/2)d(\omega + \xi/2), \quad (4.2)$$

où  $\xi$  est un déplacement en fréquence et  $d(\omega) = \sum_j \delta(\omega - \omega_j)$  correspond à la densité spectrale. Pour calculer l'autocorrélation numériquement, on remplace les  $\delta$  de dirac de la densité spectrale par des fonctions piquées mais de largeur finie. En l'occurrence, nous choisissons des Gaussiennes ayant une largeur  $\sigma$  petite devant l'écart moyen entre les fréquences. L'autocorrélation peut s'avérer utile pour révéler la présence de régularités. Illustrons ce principe avec les modes d'îlot. Le spectre des modes d'îlot étant régulier, du moins asymptotiquement, il produit des pics dans l'autocorrélation (voir Fig. 4.8) positionnés en  $\xi = \alpha\delta_1 + \beta\delta_2$ , où  $\alpha, \beta$  sont des entiers et  $\delta_1, \delta_2$  sont les écarts réguliers du spectre. L'espacement régulier entre deux modes d'îlot séparés d'un ordre radial, correspondant à la grande séparation, produit un pic dans l'autocorrélation à la position  $\xi = \Delta_i$ . Dans la section 2.2.4 nous avons présenté l'autocorrélation attendue pour un spectre GOE. Cette autocorrélation ne montre aucun pic.

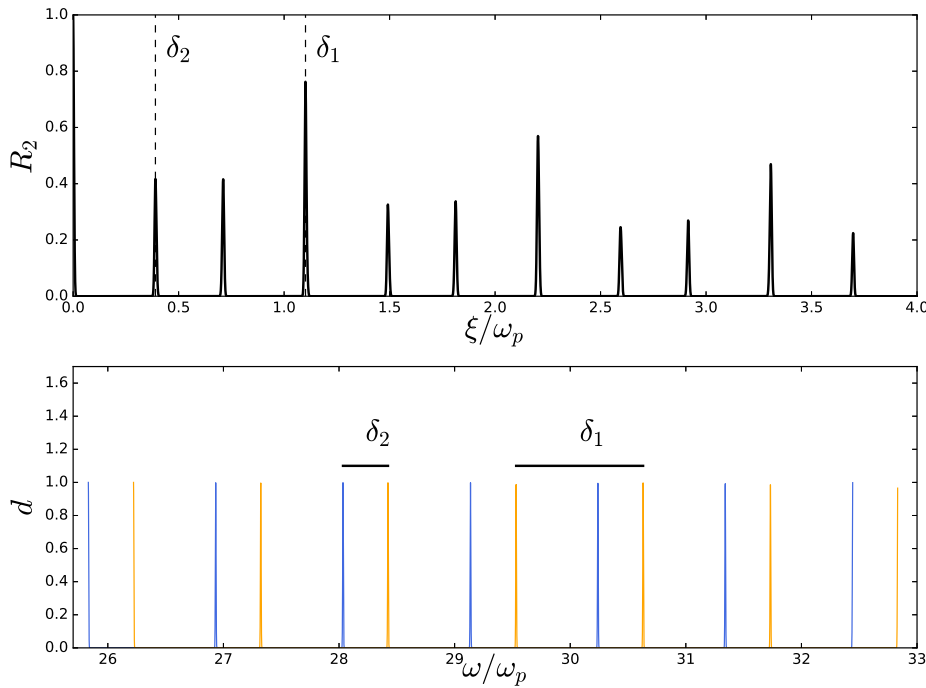


FIGURE 4.8 – Panneau du bas : densité spectrale de quelques modes d'îlot pairs avec  $\ell = 0$  (en bleu) ou  $\ell = 1$  (en orange), calculés à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ . Panneau du haut : autocorrélation calculée à partir de cette même densité spectrale. Les différences  $\delta_1 = \omega_{n+1,\ell,m} - \omega_{n,\ell,m}$  et  $\delta_2 = \omega_{n,\ell+1,m} - \omega_{n,\ell,m}$  produisent des pics dans l'autocorrélation.

Les autocorrélations de spectres chaotiques (modes impairs axisymétriques) sont présentées sur la Fig. 4.9 pour six valeurs de la rotation. Nous distinguons deux types de pics. *Le pic principal*, positionné en  $\xi = \Delta_c$  (où l'indice 'c' désigne les modes chaotiques) et *les pics secondaires*. Il n'est pas absolument évident, à première vue, que cette distinction entre pic principal et pics secondaires soit pertinente. Chronologiquement, nous avons commencé par étudier la rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ . Nous avons remarqué que la position  $\Delta_c$  du pic de plus haute amplitude est très proche de la grande séparation des modes d'îlot  $\Delta_i$ . En calculant des spectres à des valeurs plus basses de la rotation, nous avons pu remarquer que le pic positionné en  $\Delta_c \sim \Delta_i$  persistait tandis que les pics secondaires s'atténuaient. Nous montrerons par la suite que ces deux types de pics sont bien liés à des processus physiques distincts<sup>6</sup>.

L'existence d'un pic dans l'autocorrélation n'est pas une preuve qu'il existe des séries longues de modes séparés régulièrement en fréquence. On pourrait par exemple créer un pic dans l'autocorrélation si de nombreux couples de modes étaient séparés de  $\Delta_c$ . Pour mieux cerner l'organisation du spectre, on peut s'aider des diagrammes échelle. Sur la fig. 4.10 nous montrons deux exemples de diagrammes échelle qui testent la régularité en  $\Delta = \Delta_c$ , à  $\Omega/\Omega_k = 0.481$  et  $\Omega/\Omega_k = 0.658$ .

Sur cette figure, on voit des séries de fréquences chaotiques approximativement alignées. Cette organisation rappelle celle des modes réguliers, lorsqu'on les représente sur un diagramme échelle ( $\omega, \omega$  modulo  $\Delta_c$ ) (voir Fig. 1.3). Il est ainsi naturel d'interpréter ce pic dans l'autocorrélation comme une *grande séparation*. Dans la publication II nous avons étudié en détail les différentes séries verticales qui apparaissent dans le diagramme échelle. Nous avons constaté que les distributions spatiales de deux modes consécutifs dans une série sont en général similaires (voir Annexe B.2 pour quelques exemples de ces séries). Pour comprendre l'origine de cette grande séparation dans les spectres chaotiques, nous allons utiliser le formalisme de la théorie des orbites périodiques.

## 4.2 Analyse semiclassique

Dans le chapitre 2, nous avons introduit un certain nombre d'outils de la physique semiclassique. Nous avons déjà utilisé certains de ces outils, comme les sections de Poincaré et les distributions de Husimi pour caractériser la dynamique des rayons acoustiques et associer les modes aux régions de l'espace des phases. Dans cette section, nous nous attaquons au cœur de cette thèse : comprendre l'origine physique des régularités dans le spectre chaotique. Pour atteindre cet objectif, nous allons faire appel aux méthodes du *chaos quantique*, qui fait le lien entre la dynamique des rayons dans la zone ergodique et les propriétés du spectre chaotique. En particulier nous exploiterons la théorie des orbites périodiques qui est fondée sur la formule des traces de Gutzwiller (voir section 2.2.3). Dans un premier temps, nous allons montrer que la formule des traces, développée initialement dans le contexte de la mécanique quantique, peut être

6. On remarquera ici l'importance, en recherche, des premières données auxquelles on est confronté. Si nous avions voulu explorer d'abord les très hautes rotations, il aurait été très difficile de déceler la différence, pourtant cruciale, entre ces deux types de pics. Un remède simple à ce biais consiste à produire un jeu de données complet au plus tôt dans le processus de recherche, mais cela peut prendre du temps.

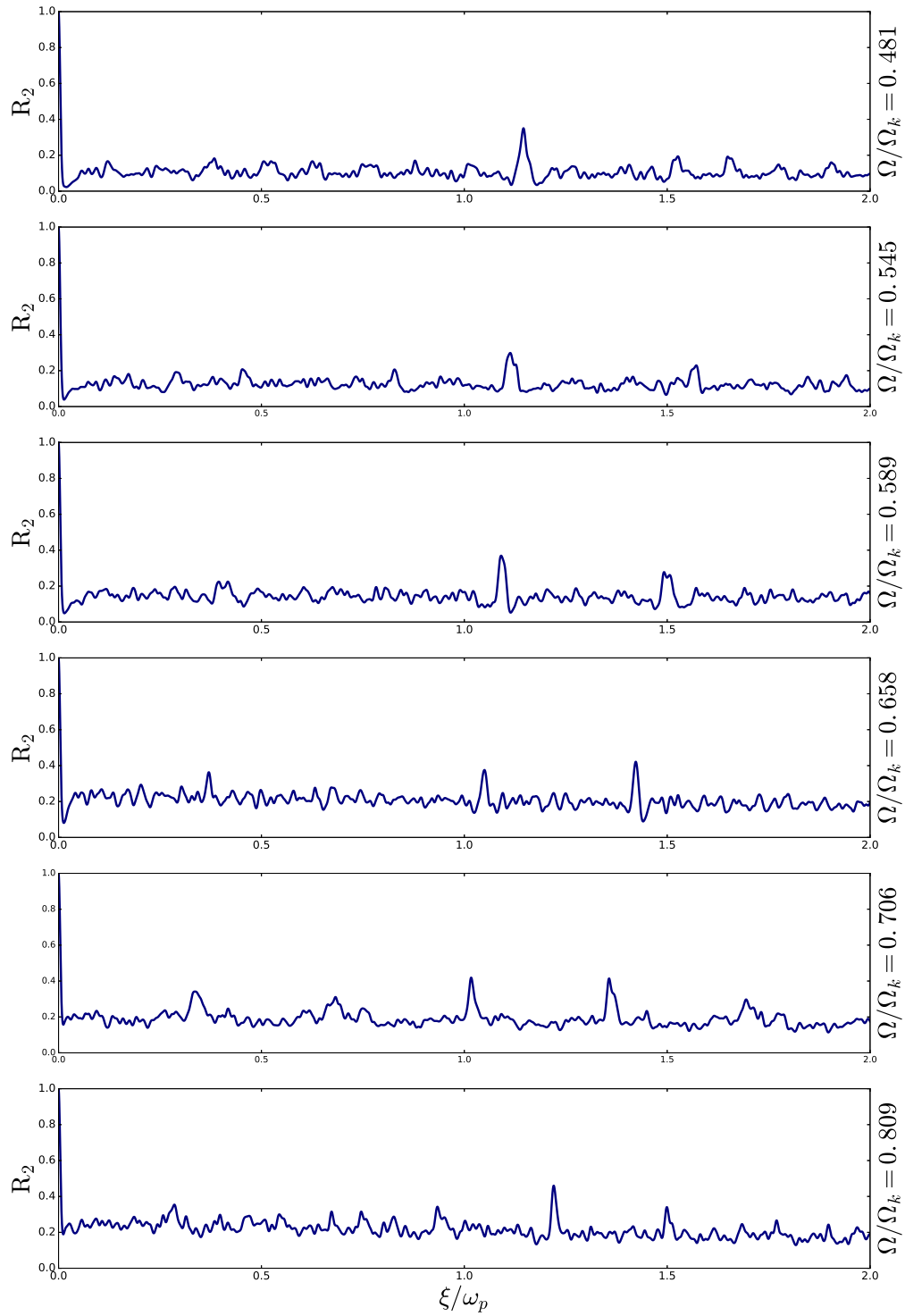


FIGURE 4.9 – Autocorrélations des six spectres chaotiques de notre base de données.



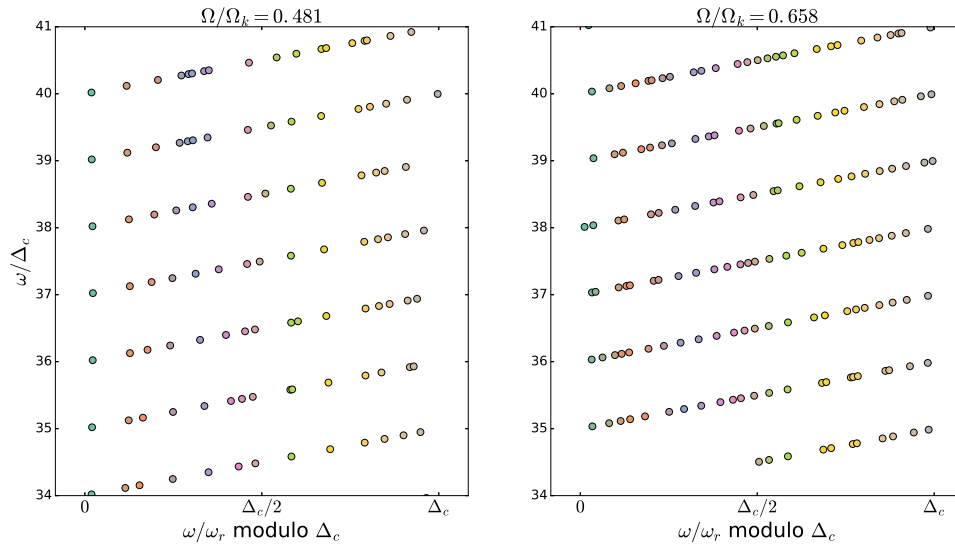


FIGURE 4.10 – Diagrammes échelle à deux valeurs de la rotation. La valeur  $\Delta_c$  dépend de  $\Omega$  et correspond à la position du pic principal de l'autocorrélation. Le code couleur est tel que deux points parfaitement alignés apparaissent exactement de la même couleur.

adaptée au problème des oscillations acoustiques d'étoiles. Ensuite, en appliquant l'approximation diagonale de Berry, nous obtiendrons une expression de l'autocorrélation qui fait intervenir les temps de parcours des rayons acoustiques entre deux rebonds à la surface de l'étoile. Nous pourrions montrer, à ce stade, comment la forte inhomogénéité de la vitesse du son dans l'intérieur stellaire ( $c_s(r \sim r_s) \gg c_s(r \sim 0)$ ) affecte l'autocorrélation du spectre de fréquence au point de produire le pic principal. Dans un second temps, nous nous intéresserons au fait que les trajectoires ergodiques restent piégées près de l'îlot central, plus ou moins longtemps selon la rotation de l'étoile. Nous présenterons un ensemble d'arguments qui amènent à penser que ce phénomène est à l'origine de la présence de pics secondaires à différentes valeurs de la rotation.

### 4.2.1 Méthodes du chaos quantique pour les oscillations acoustiques

#### Formule des traces de Gutzwiller

Comme dans un billard les rayons acoustiques dans une étoile sont contraints dans un domaine fermé, qui se réduit à deux dimensions grâce à la symétrie cylindrique autour de l'axe de rotation. La géométrie de la surface déterminant la nature intégrable, mixte ou complètement chaotique de la dynamique. Surtout, dans les étoiles comme dans les billards, les modes stationnaires  $\Psi(\mathbf{x})$  sont solutions d'une équation de Helmholtz

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}) + k^2 \Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.3)$$

avec  $k^2 = E/\hbar$  dans le cas quantique et  $k^2 = (\omega^2 - \omega_c^2)/c_s^2$  pour les oscillations acoustiques stellaires sous les hypothèses que nous avons listées au chapitre 3. Grâce à

l'analogie avec les billards quantiques, il est possible d'adapter et réutiliser tout le formalisme de la théorie des orbites périodiques introduit dans le chapitre 2. Le point de départ de cet appareil théorique consiste à exprimer la densité spectrale  $d(\omega)$  en deux parties  $\bar{d}(\omega)$  et  $d^{osc}(\omega)$ . La partie moyennée correspondant au terme de Weyl et la partie fluctuante (ou oscillante) faisant intervenir une somme sur les orbites périodiques du système Hamiltonien

$$d^{osc}(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \sum_j T_j |\det(M_j - I)|^{-1/2} e^{iS_j(\omega) - i\kappa'_j \pi/2}, \quad (4.4)$$

où l'indice  $j$  désigne les orbites périodiques,  $T_j$  le temps de parcours,  $S_j$  l'action et  $M_j$  est la matrice de monodromie. La dérivation détaillée de la formule des traces est faite dans l'Annexe de la publication II, où nous reprenons la dérivation de [Gutzwiller \(1990\)](#) en partant de l'équation d'onde acoustique, Éq. 3.32, à la place de l'équation de Schrödinger. Le temps de parcours  $T_\gamma$  d'un rayon suivant un chemin  $\gamma$  (périodique ou non) de  $q$  à  $q'$ , dépend bien sûr de la vitesse du son dans le milieu stellaire

$$T_\gamma = \int_\gamma \frac{ds}{\tilde{c}_s}, \quad (4.5)$$

où  $s$  est la coordonnée curviligne suivant  $\gamma$ . L'action  $S(q, q', \omega)$  est donnée par

$$S_\gamma(q, q', \omega) = \omega T_\gamma. \quad (4.6)$$

## Approximation diagonale de Berry

Nous avons décrit dans la section 2.2.4 la méthode de Berry, dite de *l'approximation diagonale*, permettant d'exploiter la formule des traces pour dériver une expression approchée de diverses grandeurs statistiques, e.g. la rigidité spectrale ([Berry, 1985](#)) ou la variance ([Berry, 1991](#)). Suivant cette méthode, nous écrivons le facteur de forme

$$K(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\xi T) \langle d^{osc}(\omega - 1/2\xi) d^{osc}(\omega + 1/2\xi) \rangle_\omega, \quad (4.7)$$

qui est une fonction du temps acoustique  $T$  le long des orbites périodiques. Puis nous appliquons la moyenne  $\langle f \rangle_\omega = \int f d\omega$  en négligeant la contribution des termes non diagonaux (voir publication II, section 4.1.1 pour les détails) pour obtenir l'expression approchée

$$K \sim K_D(T) \propto \sum_j A_j^2(T) \delta(T - T_j), \quad (4.8)$$

l'indice  $j$  désignant les différentes orbites périodiques et  $K_D$  le facteur de forme dans l'approximation diagonale. Cette somme est usuellement calculée pour  $T \rightarrow \infty$  en invoquant la règle de somme de [Hannay and Ozorio de Almeida \(1984\)](#), ce qui aboutit à un comportement linéaire. Alternativement, on peut remplacer, suivant e.g. [Sieber and Richter \(2001\)](#) la somme sur les orbites périodiques par une intégrale de densité  $\rho(T)$ ,

$$K_D(T) \rightarrow \int A^2(T') \delta(T - T') \rho(T') dT' = A^2(T) \rho(T). \quad (4.9)$$

Génériquement, l'amplitude  $A(T)$  et la densité  $\rho(T)$  des orbites périodiques s'expriment en fonction des entropies métrique  $h_M$  et topologique  $h_T$  du système (voir [Ott \(2002\)](#) pour une définition) supposées égales :

$$A(T) = T e^{-\frac{1}{2}h_M T}, \quad \rho(T) = \frac{1}{T} e^{h_T T}. \quad (4.10)$$

Cette approche mène donc elle aussi à un comportement linéaire du facteur de forme  $K_D(T) \propto T$ . Nous montrerons par la suite que, dans notre système, l'expression de  $\rho(T)$  doit être modifiée pour les temps courts. Cette modification impactera à son tour la fonction  $C(\xi) = \langle d^{\text{osc}}(\omega - 1/2\xi) d^{\text{osc}}(\omega + 1/2\xi) \rangle_\omega$ , dont on peut obtenir une expression approchée en calculant la transformée de Fourier inverse de  $K_D(T)$ . Nous aurons alors trouvé une expression semiclassique d'une grandeur très voisine de l'autocorrélation  $R_2(\xi)$ .

## Croissance du nombre d'orbites périodiques

Dans l'approximation diagonale, la densité  $\rho(T)$  des orbites périodiques ayant une période comprise entre  $T$  et  $T + dT$  joue un rôle central. Dans la prochaine section nous chercherons à exprimer  $\rho(T)$  dans notre système, mais avant cela regardons le comportement des orbites périodiques dans un système chaotique usuel. Le système que nous allons regarder est décrit dans ([Georgeot and Prange, 1995](#)). Il s'agit d'un système pulsé ouvert à une dimension spatiale, soumis au potentiel  $V(q) = V_0(q^2 - |q|)$ ,  $|q| < 1$  et  $V(q) = 0$  ailleurs. Le système étant pulsé, son évolution temporelle est décrite par une application :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} - V_0 b_n, \quad (4.11)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2V_0 \\ 1 & 1 + 2V_0 \end{pmatrix} \quad b_n = -V_0 \begin{pmatrix} \text{signe}(q_n) \\ \text{signe}(q_n) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

L'intérêt de ce système est double. D'abord, toutes les orbites peuvent se calculer analytiquement. Mais surtout, il est possible de les trouver toutes. Celles-ci sont données par

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = (I - U^n) B_{n-1}, \quad (4.13)$$

où la constante  $B_n = U^n b_0 + U^{n-1} b_1 + \dots + b_n$  dépend de la suite  $\text{signe}(q_0), \dots, \text{signe}(q_n)$ . La détermination des orbites périodiques est ainsi facilitée par l'existence d'une *dynamique symbolique*, dans la mesure où il existe une orbite pour chaque séquence de signes :  $+, -, -, \dots, +$  (voir e.g. [Jensen \(1994\)](#) à ce sujet).

Le nombre d'orbites périodiques dont l'action est comprise entre  $S$  et  $S + dS$  est donné sur la Fig. 4.11, panneau de gauche. Nous pouvons utiliser l'action  $S$  dans ce contexte car elle est proportionnelle au temps de parcours. Comme attendu, nous vérifions la croissance exponentielle du nombre d'orbites périodiques. Sur le panneau de droite, nous avons représenté la même quantité mais pour les orbites périodiques de

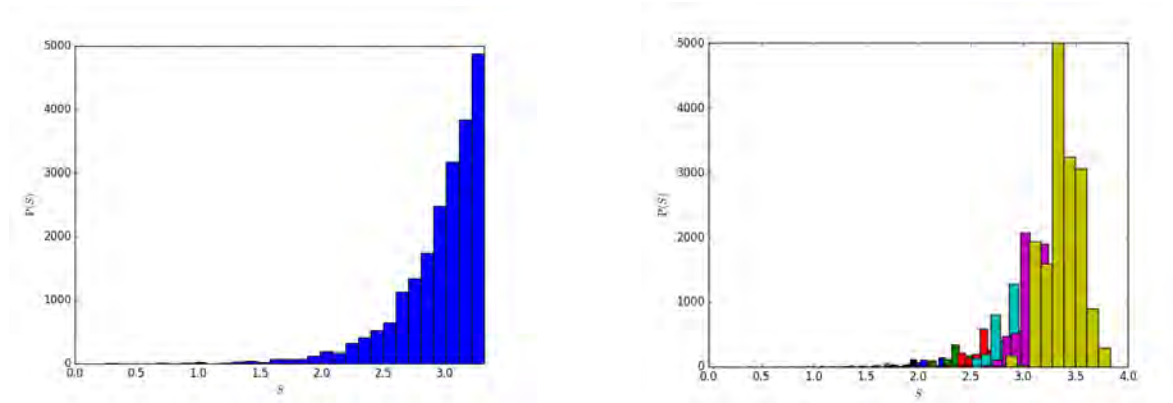


FIGURE 4.11 – Croissance du nombre d’orbites périodiques dans un système chaotique pulsé. Le panneau de gauche montre le nombre d’orbites périodiques d’action  $S \in [S, S + dS]$ . On constate comme attendu une croissance exponentielle. À droite nous superposons, sans les ajouter entre-elles, les distributions des orbites de longueur  $n = 1, \dots, 15$ . Prisent indépendamment, les distributions sont grossièrement Gaussiennes.

longueur  $n = 1, \dots, 15$ . Chaque distribution, d’une couleur différente sur la figure, est grossièrement modélisée par une Gaussienne. Ainsi, c’est le recouvrement de ces distributions grossièrement Gaussiennes qui produit la croissance exponentielle de  $N(S)$ . Cette manière de décomposer la distribution  $\rho(T)$  s’avérera utile par la suite. Nous verrons en effet que dans l’étoile, les distributions correspondant aux orbites de période  $n$  fixée<sup>7</sup> ne se recouvrent pas ou se recouvrent très partiellement, ce qui induit une modulation de la densité  $\rho(T)$ .

#### 4.2.2 Effet du profil inhomogène de la vitesse du son sur les orbites périodiques

Le potentiel qui gouverne la dynamique des rayons acoustiques  $V(r, \theta) = -1/2 \tilde{c}_s^2(r, \theta)$  dépend directement de la vitesse du son  $c_s$ . Le milieu traversé par les rayons acoustiques est fortement inhomogène et  $c_s$  décroît radialement de plusieurs ordres de grandeur, comme la racine carré de la température. Cela contraste avec le potentiel dans un billard quantique, qui est uniforme. Dans cette section nous allons constater les conséquences de cette inhomogénéité sur le comportement des rayons. Nous montrerons que le profil de la vitesse du son impose une forte concentration du temps de parcours des orbites autour d’une valeur précise  $T_0$  (ainsi que les multiples  $nT_0$ , où  $n$  est un entier). Cela se traduit par une forte modulation de la densité  $\rho(T)$ . Aux temps longs, la modulation s’estompe et on retrouve le régime générique de Hannay et Ozorio de Almeida. Nous verrons que la modulation de  $\rho(T)$  aux temps courts est suffisante pour induire des corrélations dans le spectre des modes chaotiques.

La formule asymptotique de Tassoul fait intervenir le temps acoustique le long du rayon d’une étoile sphérique  $T = \int dr/c_s$  (Tassoul, 1980). D’une manière similaire, la formule qui décrit le comportement asymptotique des modes d’îlot fait intervenir le

7. pour une orbite acoustique dans l’étoile, le nombre  $n$  correspond au nombre de rebonds à la surface

temps acoustique calculé le long de l'orbite centrale de l'îlot  $T = \oint ds/\tilde{c}_s$ . Dans le cas des trajectoires chaotiques, il ne peut pas exister de formule analogue. Le temps acoustique intervient cette fois dans l'expression du facteur de forme  $K(T) = A^2(T) \rho(T)$ , où  $T$  correspond au temps acoustique des orbites périodiques instables de la zone ergodique. Regardons d'abord la distribution des temps acoustiques entre deux rebonds à la surface, présentée pour la rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  sur la Fig. 4.12.

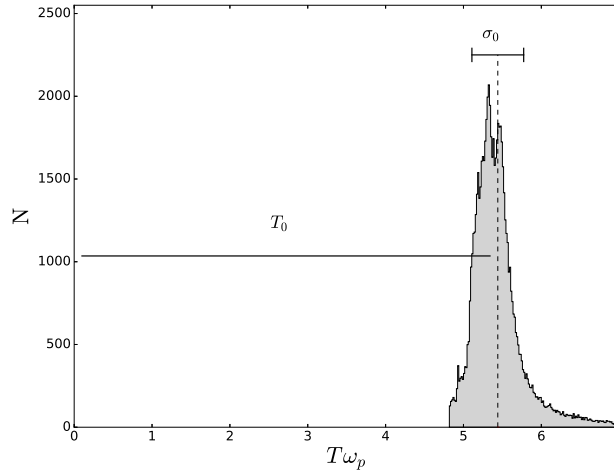


FIGURE 4.12 – Distribution des temps de parcours entre deux rebonds à la rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ . La valeur moyenne  $T_0$  et l'écart-type  $\sigma_0$  de la distribution sont représentés. Figure tirée de la publication I.

Entre deux rebonds, les trajectoires de la zone ergodique peuvent emprunter des chemins de longueurs variées. On pourrait s'attendre, à partir de ce constat, à une grande variété des temps de parcours. C'est pourtant l'inverse que nous constatons sur la Fig. 4.12, qui montre que les temps de parcours sont concentrés autour de  $T = T_0$ . Le rapport de l'écart-type sur la valeur moyenne  $\sigma_0/T_0 \simeq 0.06$  à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  et  $\sigma_0/T_0 \simeq 0.07$  à  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  caractérise bien le faible étalement de la distribution. Ce faible écart-type s'explique par la chute brutale de la vitesse du son près de la surface. À cause de cela, le temps de parcours d'un rayon quelconque entre deux rebonds est dominé par le temps passé près du bord et sa longueur géométrique, qui dépend du chemin suivi dans les couches plus profondes de l'étoile, n'est pas déterminante.

En calculant plusieurs milliers de cordes pour des valeurs croissantes de la rotation on constate que  $T_0$  et  $\sigma_0$  augmentent, comme en atteste la table 4.2. Une fois encore cette évolution se comprend bien à partir du profil de la vitesse du son. À mesure que le rayon équatorial augmente sous l'effet de la force centrifuge, les zones où la vitesse du son est la plus basse (voir les zones en jaune sur la Fig. 4.13) s'épaississent. Il est clair que, pour des rotations croissantes, l'augmentation du rayon équatorial, combinée au ralentissement plus important des rayons acoustiques près de  $r = R_{eq}$  allonge le temps de parcours moyen  $T_0$  entre deux rebonds.

L'écart-type  $\sigma_0$  dépend notamment du contraste entre les temps acoustiques les plus longs et les plus courts. Prenons pour exemple les chemins  $\gamma_p$  et  $\gamma_{eq}$  reliant entre

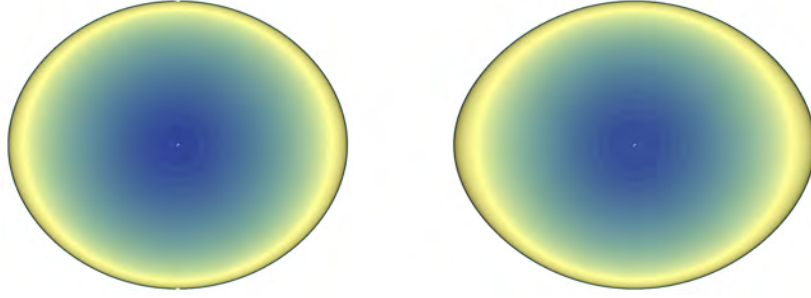


FIGURE 4.13 – Profil de la vitesse du son dans un plan méridien à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  (gauche) et  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  (droite). Plus la rotation est élevée et plus la zone de faible vitesse du son, représentée en jaune, est épaisse au niveau de l'équateur.

eux les deux pôles ou les deux points de la surface coupant l'équateur<sup>8</sup>. Si le temps acoustique change peu le long du chemin  $\gamma_p$ , il doit en revanche augmenter de manière importante le long du chemin  $\gamma_{eq}$  entre  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  et  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ . Un autre effet contribue à augmenter l'écart-type. Il s'agit de l'augmentation rapide avec la rotation de  $\tilde{k}_\theta^{max}$  que l'on observe sur la Fig. 4.2. En effet, une valeur plus élevée de  $\tilde{k}_\theta^{max}$  signifie que les trajectoires chaotiques ont la possibilité de raser davantage la surface, ce qui crée des chemins plus courts géométriquement entre deux rebonds.

TABLE 4.2 – Évolution de  $T_0$  et  $\sigma_0$  avec la rotation. Ces quantités décrivent la distribution des temps acoustiques entre deux rebonds.  $T_0$  est la valeur moyenne et  $\sigma_0$  est l'écart-type. On constate une augmentation de ces deux grandeurs avec la rotation, avec une augmentation plus rapide de  $\sigma_0$ . Les grandeurs sont normalisées par la fréquence  $\omega_r = (4\pi G\rho_c)^{1/2}$  où  $\rho_c$  est la densité au centre du modèle d'étoile.

$\Omega/\Omega_k$	$T_0 \omega_r$	$\sigma_0 \omega_r$	$\sigma_0/T_0$
0.481	63.95	3.17	0.050
0.545	65.49	3.73	0.057
0.589	66.39	4.06	0.061
0.658	68.77	4.64	0.067
0.706	70.91	5.02	0.071
0.809	76.46	7.58	0.099

### 4.2.3 Impact sur la statistique spectrale

Nous déjà vu que le profil de la vitesse du son dans le plan méridien de l'étoile implique une concentration des temps acoustiques entre deux rebonds autour de la moyenne  $T_0$ . Nous appelons désormais toute portion de trajectoire entre deux rebonds une *corde*, que l'on peut définir aussi comme un chemin acoustique reliant deux points

8. À chacun de ces chemins correspond une orbite périodique. L'orbite qui relie les pôles est stable en dessous de  $\Omega/\Omega_k = 0.20$ . Au-dessus de cette rotation, l'orbite se déstabilise et se sépare en deux orbites périodiques stables, correspondant aux orbites centrales des îlots de période 2, et une orbite instable. L'orbite périodique située dans le plan équatoriale est en revanche instable dès que  $\Omega \neq 0$ .

à la surface de l'étoile (on devrait dire "dont les extrémités sont des points de retournement externes"). Plus largement, nous parlons de  $n$ -cordes, où  $n$  est le nombre de rebonds, pour désigner les successions de cordes.

Notre objectif est de modéliser la distribution des temps de parcours des orbites périodiques du système Hamiltonien. Dans le système que nous étudions, nous ne connaissons pas de méthode pour trouver automatiquement les orbites périodiques. Toutefois, nous pouvons remarquer que les orbites périodiques forment un sous-ensemble de la classe des  $n$ -cordes. Nous pouvons donc espérer accéder à certaines de leurs propriétés en étudiant un grand nombre de  $n$ -cordes.

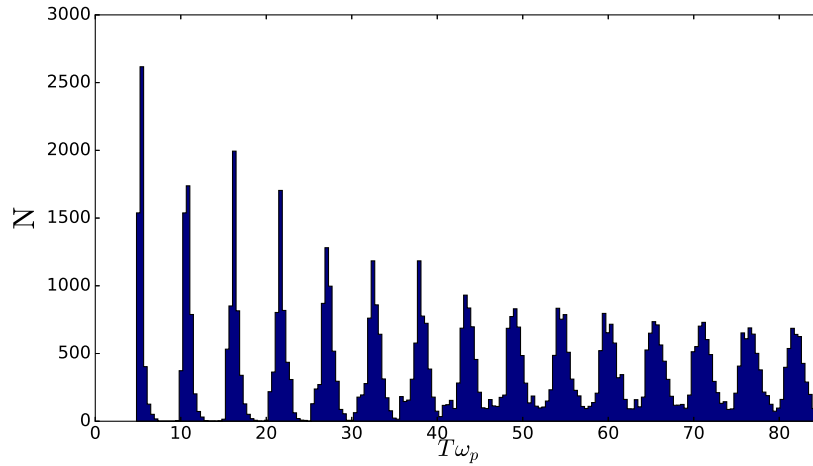


FIGURE 4.14 – Nombre de  $n$ -cordes, avec  $n \leq 15$ , en fonction de leur temps de parcours à la rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ , chaque paquet contenant 4750 cordes. Cette figure montre que les distributions des trajectoires à  $n$  rebonds ne se recouvrent pas ou très partiellement pour  $n$  faible. Figure tirée de la publication I.

Sur la Fig. 4.14 nous montrons ensemble les distributions de  $n$ -cordes pour  $n \leq 15$ . Chaque distribution comporte le même nombre de cordes et lorsque deux distributions se recoupent nous les additionnons. On observe sur cette figure que les distributions individuelles des  $n$ -cordes s'élargissent lorsque le nombre de cordes augmente suivant  $\sigma_n \approx \sqrt{n}\sigma_0$ . Cela correspond au résultat attendu pour une somme de variable aléatoire indépendante et ayant une même distribution d'écart type  $\sigma_0$ . Pour résumer, la distribution totale des temps de parcours est constituée de paquets qui s'élargissent et finissent par se recouvrir aux temps longs. Ce comportement est singulier, il est à comparer avec le comportement générique pour un système Hamiltonien chaotique montré sur la Fig. 4.11, panneau de gauche<sup>9</sup>.

Les contraintes imposées par la distribution des temps de parcours des  $n$ -cordes pourraient être suffisamment fortes pour produire une oscillation dans la distribution

9. Les deux figures ne montrent pas exactement la même quantité. Sur la Fig. 4.14 nous calculons des trajectoires quelconques et nous devons fixer nous-même le nombre de trajectoires calculées pour chaque valeur de  $n$ . Sur la Fig. 4.11 nous calculons toutes les orbites périodiques, dont le nombre croît exponentiellement. Pour une comparaison plus juste entre ces deux distributions, il faudrait multiplier la distribution de la Fig. 4.14 par une exponentielle.

$\rho(T)$  des orbites périodiques et dans le facteur de forme  $K_D(T)$ . Cette oscillation pourrait générer un pic dans l'autocorrélation, qui est reliée au facteur de forme par une transformée de Fourier. Nous allons montrer que c'est effectivement le cas. Pour cela, nous modélisons la distribution des temps de parcours comme une somme de fonctions Gaussiennes  $P(T) = \sum_n P_n(T)$ , avec

$$P_n(T) = \frac{T_0}{\sqrt{2\pi n} \sigma_0} \exp\left(-\frac{(T - n T_0)^2}{2(\sqrt{n} \sigma_0)^2}\right), \quad (4.14)$$

où  $P_n(T)$ , la probabilité pour une  $n$ -corde d'avoir un temps de parcours compris entre  $T$  et  $T + dT$ . La distribution  $P(T)$  est tracée sur la Fig. 4.15, panneau du haut. Il s'agit d'une approximation grossière qui élimine les détails fins de la véritable distribution. Mais elle résume sous une forme simple toutes les propriétés principales de la distribution, à savoir l'espacement régulier des paquets et leur élargissement vers les grandes valeurs de  $n$ . Rappelons que la fonction  $P(T)$  dépend implicitement de la rotation via  $T_0(\Omega)$  et  $\sigma_0(\Omega)$ . On suppose ensuite que la densité des orbites périodiques est modulée par la fonction  $P(T)$  :

$$\rho(T) = \frac{1}{T} e^{hT} P(T), \quad (4.15)$$

où  $h \sim h_T \sim h_M$  désigne ici l'entropie du système Hamiltonien. Le facteur de forme s'écrit alors

$$K_D(T) \propto A^2(T) \rho(T) = \left(T^2 e^{-\frac{1}{2}hT^2}\right) \left(\frac{1}{T} e^{hT}\right) = T P(T). \quad (4.16)$$

Le panneau du bas de la Fig. 4.15 montre le facteur de forme dans l'approximation diagonale. Au temps courts, il est modulé par une oscillation périodique liée à la concentration des temps de parcours autour des valeurs  $nT_0$ . À partir de  $K_D(T)$ , nous pouvons remonter à l'autocorrélation en inversant la relation de Fourier Éq. 4.7. Les transformées de Fourier sont montrées sur l'encart de la Fig. 4.16. On voit bien un pic dans l'autocorrélation à chaque valeur de la rotation. On remarque que l'oscillation de  $K_D(T)$  s'amortit aux temps longs, si bien que l'on retrouve le régime universel prédit par [Hannay and Ozorio de Almeida \(1984\)](#).

Nous avons déterminé une expression semiclassique approchée de l'autocorrélation et montré qu'un pic apparaît dans cette autocorrélation théorique. Pour cela, nous avons modélisé le facteur de forme par une fonction qui dépend, à travers  $T_0$  et  $\sigma_0$ , des propriétés du système classique. Nous pouvons ainsi calculer la position théorique du pic donnée par l'expression semiclassique à plusieurs valeurs de la rotation. Les pics théoriques montrés dans l'encart de la Fig. 4.16 correspondent aux six rotations où nous avons produit et identifié des modes chaotiques (voir section 4.1.1). Sur le panneau principal nous comparons la position de ces pics aux données, i.e. aux positions des pics principaux de la Fig. 4.9. La figure montre un bon accord entre la théorie et les données, avec une différence d'environ 5% sur la position du pic. Cette erreur est du même ordre de grandeur que celle obtenue dans [Pasek et al. \(2011\)](#) pour les modes d'îlot. La théorie prédit aussi que la hauteur du pic doit diminuer à mesure que la rotation augmente, ce que nous constatons qualitativement dans les données numériques.



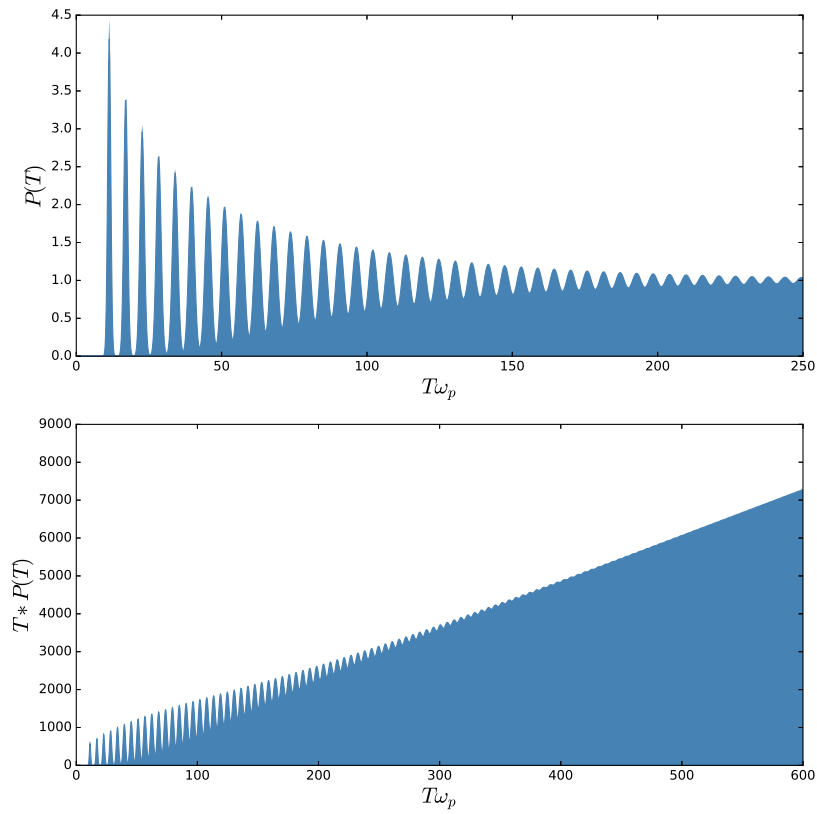


FIGURE 4.15 – Panneau du haut : distribution  $P(T)$  calculée à  $\Omega/\Omega_k = 0.658$ . Le premier paquet d'orbites est centré en  $T \approx 2T_0$  car l'orbite périodique la plus courte dans le système est de période 2. Panneau du bas : facteur de forme  $K_D(T) = T P(T)$  correspondant. On remarque que l'oscillation s'amortit aux temps longs et qu'ainsi  $K_D(T)$  retrouve, comme dans le cas générique, un comportement purement linéaire.

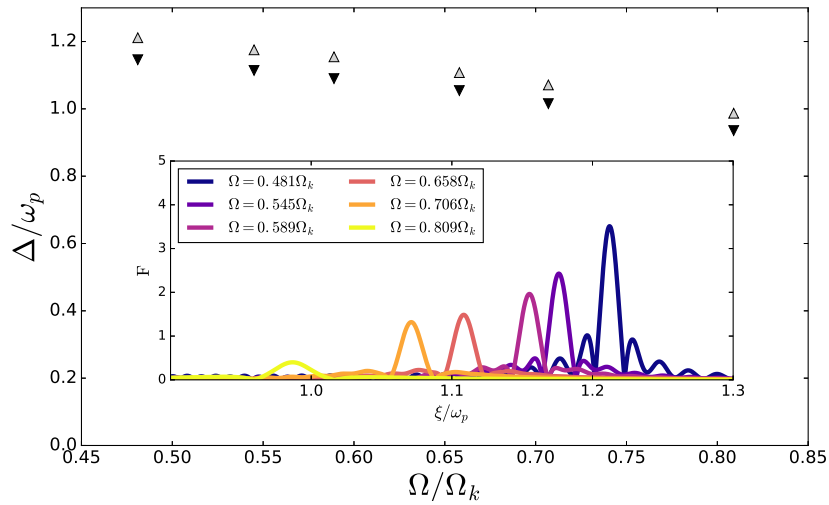


FIGURE 4.16 – Panneau principal : comparaison des positions  $\Delta_c$  (en noir) de la grande séparation observée dans les données numériques et  $\Delta_c^{th}$  (en gris) des pics prédits par l’analyse semiclassique. Encart : pics de l’autocorrélation semiclassique.

## Discussion des hypothèses

Pour expliquer l’origine d’une grande séparation dans le spectre d’oscillation chaotique des étoiles en rotation rapide, nous avons fait plusieurs approximations. D’abord, nous nous sommes placés dans l’approximation diagonale où le facteur de forme se réduit à  $K_D(T) \propto A^2(T)\rho(T)$ . Le domaine de validité de cette approximation a été discuté dans la section 2.2.5. Nous avons ensuite modélisé les distributions des  $n$ -cordes par des fonctions Gaussiennes, caractérisées par deux nombres  $T_0$  et  $\sigma_0$ . Cette approximation peut-être vue comme un ‘lissage’, puisqu’elle efface les détails fins de la véritable distribution. Rappelons ici que nous n’avons pas accès à la distribution des temps de parcours des orbites périodiques. Or c’est cette dernière distribution qui intervient dans la théorie de Berry donnant  $K_D(T)$  (rien ne garantit que les détails fins de la distribution des temps de parcours des orbites périodiques sont identiques aux détails fins de la distribution  $P(T)$ ). À côté de cela, le fait que la complexité de la distribution des temps acoustiques puisse se réduire, dans une approximation raisonnable, aux deux nombres  $T_0$  et  $\sigma_0$  ayant une signification physique clairement définie aide à mieux comprendre la physique du problème.

Enfin, le modèle que nous avons développé suppose que l’exposant de Lyapunov et l’entropie sont suffisamment réguliers pour ne pas effacer les oscillations de  $\rho(T)$ . Nous avons voulu vérifier cette hypothèse numériquement en estimant la valeur moyenne de l’exposant de Lyapunov dans le système pour des trajectoires longues. Il faut pour cela calculer l’éloignement  $d(t) = \|\mathbf{x}_A(t) - \mathbf{x}_B(t)\| = \|\mathbf{w}_{AB}(t)\|$  de deux trajectoires initialement voisines  $\mathbf{x}_A(t)$  et  $\mathbf{x}_B(t)$ . Pour calculer l’exposant de Lyapunov sur les temps longs, il faut réduire à chaque itération la norme de  $\mathbf{w}_{AB}(t)$  suivant e.g. la méthode décrite dans [Lichtenberg and Lieberman \(1992\)](#). Dans notre système, il a été difficile d’obtenir les exposants de Lyapunov avec une précision suffisante, à cause de sa grande inhomogénéité. La méthode Runge-Kutta que nous utilisons (voir section

3.3.1) possède deux modes, l'un avec un pas de temps adaptatif et l'autre avec un pas de temps rigide. Le pas de temps adaptatif est très utile pour intégrer les équations de Hamilton, car il permet d'obtenir une bonne précision sur la position des rayons près de la surface, où la vitesse du son varie rapidement. En revanche il n'est pas adéquat pour le calcul de l'exposant de Lyapunov. En effet, le pas de temps variant de plusieurs ordres de grandeurs sur une portion de rayon dans notre système, il n'est pas possible de calculer  $\mathbf{x}_A$  et  $\mathbf{x}_B$  au même temps  $t$  même pour des trajectoires voisines. La seconde méthode est d'estimer le pas de temps nécessaire pour avoir une bonne précision en surface et d'utiliser ce pas de temps dans toute l'étoile. Cette seconde méthode nécessite en revanche un temps de calcul très long. Nous n'avons pas pu itérer la méthode de calcul des exposants de Lyapunov sur des temps suffisamment longs pour obtenir une bonne précision.

### 4.3 Pics additionnels et barrières partielles

L'étude semiclassique présentée dans la section précédente explique l'apparition d'un pic dans l'autocorrélation des spectres chaotiques. Ce pic est visible à toutes les rotations et s'interprète comme une grande séparation. On voit clairement sur la Fig.4.9 que d'autres pics apparaissent à certaines rotations. Une discussion détaillée sur l'origine possible de ces pics additionnels est donnée dans la publication II. Dans cette section, nous mettons en avant l'idée que ces pics sont liés à l'apparition de structures dans l'espace des phases autour de l'îlot central, appelées *barrières partielles*, ayant pour effet de piéger les trajectoires chaotiques. Les barrières partielles sont des structures invariantes présentes dans les zones ergodiques de l'espace des phases. Les trajectoires peuvent les traverser, contrairement e.g. aux séparatrices, mais le flux de trajectoires à travers une barrière partielle est faible (pour plus de détails, voir l'annexe B.1).

Les barrières partielles sont formées par la destruction des tores invariants qui accompagnent la création des chaînes d'îlot (Bohigas et al., 1993). Pour les chercher, nous avons généré un grand nombre de trajectoires dans la zone chaotique entourant l'îlot central pour différentes rotations. En suivant l'évolution temporelle des trajectoires sur la PSS on constate qu'une partie d'entre-elles se répandent rapidement dans toutes les régions de la zone chaotique<sup>10</sup>. D'autres trajectoires restent en revanche confinées dans une zone restreinte autour de l'îlot, avant de s'en échapper sur le long terme. Les encarts de la Fig. 4.17 montrent des instantanés de cette évolution pour  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  et  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ . Ces figures montrent qu'il y a bien des barrières partielles dans la zone chaotique du système que nous étudions. Ces barrières partielles délimitent les zones, visibles sur la figure, avec une forte concentration d'orbites. On constate aussi que l'aire de la zone est plus importante à  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  (ce qui est vrai aussi pour le rapport entre l'aire délimitée par la barrière partielle et l'aire de la zone chaotique centrale). Nous avons également estimé le flux sortant  $\phi_{ext}$  des trajectoires sortantes pour quantifier l'imperméabilité des barrières partielles au passage des trajectoires à

10. Sur la Fig. 4.17, encart de gauche, on voit que les trajectoires ne s'approchent pas de la chaîne d'îlots de période 6. C'est à cause de la barrière partielle associée à cette autre chaîne d'îlots, qui bloque l'entrée des trajectoires.

trois valeurs de la rotation :  $\phi_{ext}(\Omega/\Omega_k = 0.589) \simeq 0.17$ ,  $\phi_{ext}(\Omega/\Omega_k = 0.658) \simeq 0.11$  et  $\phi_{ext}(\Omega/\Omega_k = 0.706) \simeq 0.06$ .

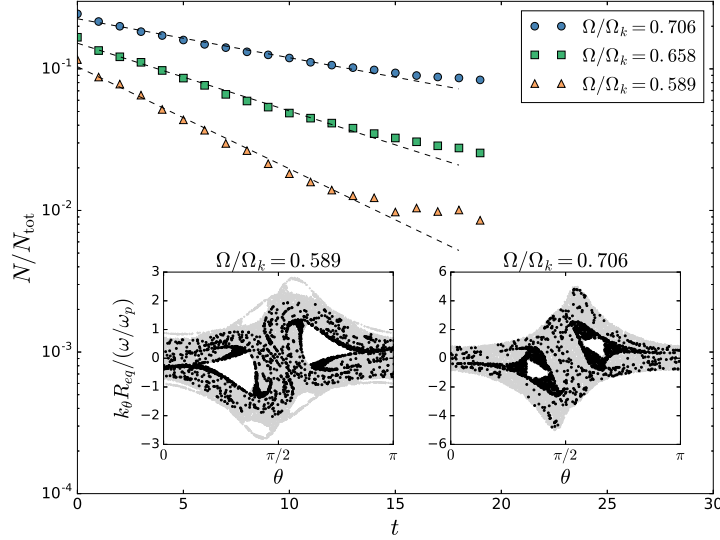


FIGURE 4.17 – Panneau principal : Évolution du nombre de trajectoires (vues comme des points sur la PSS)  $N$  dans la zone délimitée par les barrières partielles sur le nombre de points total. L'ordonnée est donnée en échelle logarithmique et la pente donne le taux d'échappement de la zone délimitée par les barrières partielles. Encarts : instantanés de l'évolution temporelle du système pour des conditions initiales situées près de l'îlot. Les zones délimitées par les barrières partielles confinent les trajectoires, d'où leur forte concentration. Figure tirée de la publication

I.

En plus de limiter les flux de rayons, les barrières partielles peuvent piéger des ondes et former des modes. Par exemple dans [Shim et al. \(2011\)](#) les auteurs montrent que la présence de barrières partielles forme des modes de type whispering gallery dans une cavité classiquement chaotique. Pour former de tels modes, il faut que la taille de la zone délimitée par les barrières partielles soit de l'ordre de la résolution des modes dans l'espace des phases. De manière analogue, les barrières partielles présentes dans notre système pourraient former des modes devant être quantifiés indépendamment des modes chaotiques. Autour de  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ , où les pics additionnels sont nombreux et de grande amplitude, la zone délimitée par les barrières partielles est de taille importante et bloque efficacement les trajectoires en comparaison des rotations plus faibles où les pics additionnels sont moins marqués voire absents (nous avons également constaté la présence de barrières partielles délimitant une zone de taille importante à  $\Omega/\Omega_k = 0.809$ ). Ces indices semblent indiquer que des modes sont formés par les barrières partielles à diverses valeurs de la rotation, en particulier aux rotations présentant des pics additionnels. Cette interprétation expliquerait pourquoi nous observons à  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  une distribution des proches voisins caractéristique d'une superposition de spectres indépendants (voir Fig. 4.7). Une étude plus approfondie serait toutefois nécessaire pour valider pleinement cette interprétation.

## 4.4 Le spectre à basses fréquences

Jusqu'à présent nous avons utilisé une base de données de modes chaotiques de hautes fréquences afin d'avoir un point de comparaison fiable pour la théorie asymptotique. Dans les pulsateurs de type solaire une structure asymptotique apparaît déjà clairement alors que les fréquences ont des ordres radiaux de l'ordre de  $n \sim 20$ . Mais les fréquences des delta Scuti correspondent aux premiers ordres radiaux (jusqu'à  $n \sim 10$ ). Il est donc important de déterminer dans quelle mesure les propriétés asymptotiques des modes chaotiques restent pertinentes pour comprendre la structure du spectre à basse fréquence. On peut déjà noter que, dans le cas des modes d'îlots, les régularités sont déjà bien visibles à basses fréquences (Lignières et al., 2006). Nous présentons sur la Fig. 4.18 un diagramme échelle où nous avons placé à la fois les modes d'îlot et les modes chaotiques (dont la distribution spatiale à basse fréquence est montrée sur la Fig. 4.19 pour trois modes impairs) à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ , ce qui est pertinent puisque la grande séparation des modes d'îlot  $\Delta_i = 1.0907$  et celle des modes chaotiques  $\Delta_c = 1.0899$  sont très proches. Les modes présentés ont tous une fréquence inférieure à  $15 \Delta_i$ . On voit sur cette figure que les modes d'îlots sont relativement bien alignés, ce qui est aussi le cas des modes chaotiques impairs. Les modes chaotiques pairs sont en revanche plus irréguliers. Pour nous rapprocher au plus près des observations, nous pourrions calculer les visibilités des modes à ces fréquences et ne représenter que les plus visibles sur le diagramme échelle. Cela constituerait un prolongement naturel du travail réalisé dans cette thèse.

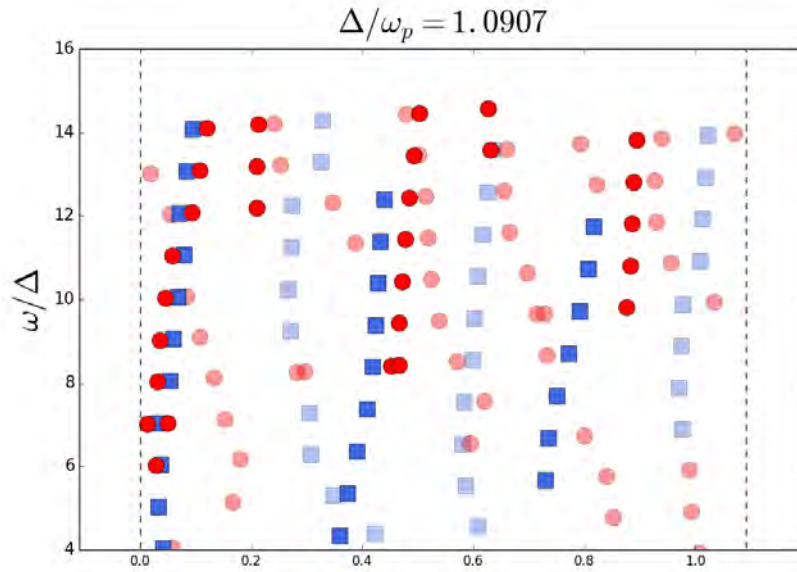


FIGURE 4.18 – Diagramme échelle dans le domaine des basses fréquences. Les carrés bleus correspondent aux modes d'îlots  $\ell = 0, 1, 2$  et les ronds rouges aux modes chaotiques. Les modes impairs sont représentés en couleurs saturées et les modes pairs en couleurs diaphanes.

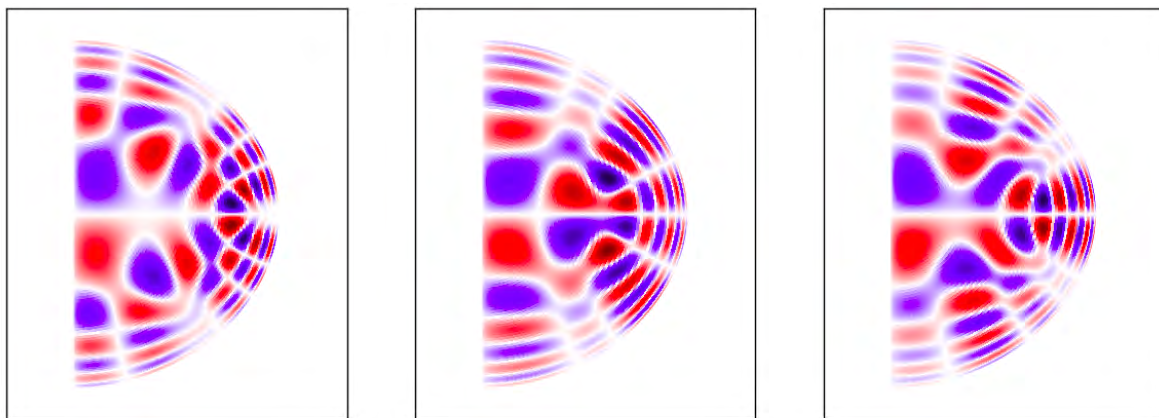


FIGURE 4.19 – Trois modes chaotiques de basse fréquence.

# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons calculé des modes d'oscillation de haute fréquence pour un modèle polytropique d'étoile à plusieurs valeurs de la rotation. À chacune de ces rotations nous avons identifié les modes chaotiques, ce qui nous a permis de constituer une base de données numériques de modes chaotiques de hautes fréquences. Les autocorrélations de ces spectres chaotiques présentent des pics nettement visibles. On trouve selon la valeur de la rotation, un seul pic ou plusieurs. De tels pics sont symptomatiques de la présence de régularités dans les spectres (la position du pic indiquant la valeur de l'écart régulier en fréquence). L'un des pics est visible à toutes les valeurs de la rotation et sa position est très proche de la grande séparation des modes d'ilot. L'objectif principal de cette thèse a été l'interprétation de ce pic. Cet objectif est double. Du point de vue de l'astérosismologie, la position du pic est potentiellement une observable que l'on peut extraire des spectres de pulsation des étoiles. Cela motive notre étude asymptotique afin de relier cette position aux propriétés physiques de l'intérieur stellaire. Mais ces pics présentent aussi un intérêt du point de vue du chaos ondulatoire. En effet, de tels pics n'ont jamais été observés à notre connaissance dans des systèmes ondulatoires asymptotiquement chaotiques. Il nous a donc fallu comprendre quelle spécificité, dans le système physique que nous étudions, est à l'origine de ces pics surprenants. Nous arrivons à la conclusion qu'il s'agit de la forte inhomogénéité radiale de la vitesse du son.

L'impact du profil inhomogène de la vitesse du son peut se comprendre comme suit. Entre deux rebonds à la surface, les temps de parcours des trajectoires chaotiques suivent une distribution grossièrement Gaussienne centrée en  $T_0$  et d'écart-type  $\sigma_0$ . La très faible vitesse du son en surface (plusieurs ordres de grandeurs en-dessous de sa valeur au cœur) implique une concentration des temps de parcours entre deux rebonds, qui se traduit par une distribution Gaussienne resserrée autour de sa valeur moyenne :  $\sigma_0 \ll T_0$ . Nous avons ensuite modélisé de manière approchée la distribution des temps de parcours des orbites périodiques de la zone chaotique par une fonction de  $T_0$  et  $\sigma_0$  qui a un comportement oscillant ( $T_0$  étant la période d'oscillation). En utilisant les outils du chaos quantique, plus spécifiquement la théorie des orbites périodiques (Gutzwiller, 1990), nous avons montré que cette distribution approchée est reliée à l'autocorrélation du spectre par une transformée de Fourier, ce qui permet d'expliquer la présence d'un pic dans l'autocorrélation. Le calcul de  $\sigma_0$  et  $T_0$  par le tracé de rayons à différentes valeurs de la rotation fournit des valeurs théoriques de la position du pic, en bon accord avec les données numériques. La position théorique du pic est donnée par  $\Delta_c = 2\pi/T_0$ . Une bonne estimation de cette valeur est obtenue, sans recourir au tracé de rayons, par une moyenne de la vitesse du son dans le modèle d'étoile (voir publication II).

Nous interprétons la position  $\Delta_c$  du pic comme une grande séparation. Cela est

justifié par le fait que les fréquences s’organisent en séries approximativement verticales sur le diagramme échelle ( $\omega$ ,  $\omega$  modulo  $\Delta_c$ ). À cause de la nature chaotique des modes, l’écart entre deux fréquences successives sur une série verticale n’est pas parfaitement constant, y compris dans le régime asymptotique (à ce sujet, notre analyse prédit un élargissement du pic de l’autocorrélation avec la rotation, ce qui correspond à une perte de régularité des fréquences chaotiques à l’approche de la rotation critique). Dans [Reese et al. \(2008\)](#), la présence d’un écart régulier s’interprétant comme une grande séparation avait été démontrée pour les modes d’îlots et la valeur  $\Delta_i$  de cette grande séparation avait été liée au temps de parcours de l’orbite centrale de l’îlot entre deux rebonds dans [Pasek et al. \(2011, 2012\)](#). La grande proximité de  $\Delta_c$  et  $\Delta_i$  constatée dans les spectres calculés numériquement (l’écart relatif est typiquement de  $\sim 1\%$ ) s’explique bien par le faible écart-type des temps de parcours entre deux rebonds (qui est en toute rigueur une quantité différente de  $\sigma_0$ , car  $\sigma_0$  ne caractérise que les trajectoires chaotiques). Nous en concluons que les régularités observées dans les  $\delta$  Scuti, qui étaient jusqu’ici attribuées aux modes d’îlots ([García Hernández et al., 2015](#)), sont potentiellement dues aussi aux modes chaotiques. Une manière de différencier les deux types de modes pourrait consister à chercher la demi-grande séparation, qui est présente dans le spectre des modes d’îlot mais pas dans celui des modes chaotiques.

Pour progresser dans l’interprétation des modes de pression des  $\delta$  Scuti, une possibilité est d’utiliser notre compréhension de l’organisation asymptotique du spectre des modes p pour mettre au point, dans les spectres basses fréquences, des méthodes d’identification des différents types de modes (îlots, chaotiques, whispering gallery). Avant d’analyser des données observées, il faudrait déjà considérer des spectres théoriques, en commençant par les plus simples comme les pulsations adiabatiques d’une étoile jeune en rotation uniforme, avant d’introduire les effets de l’évolution chimique, de la rotation différentielle ou de l’excitation non-adiabatique. Nous avons amorcé ce travail en identifiant les modes axisymétriques de basse fréquence pour un modèle polytropique à une rotation donnée (section 4.4). Une piste prometteuse discutée dans la section 4.4 de la publication II est d’appréhender l’évolution des spectres avec la rotation en suivant les séries de modes d’ordre radial croissant ayant le même degré  $\ell_s$  à rotation nulle (et le même nombre azimuthal  $m$ ) et en identifiant la nature des modes dans ces séries en fonction de la rotation.

Du point de vue de l’analyse semiclassique, l’effet des barrières partielles pourrait être étudié de manière plus approfondie. Nous avons montré que la présence de grandes zones piégeant les trajectoires chaotiques sont associées à une statistique spectrale anormale et à la présence des pics secondaires. Mais l’effet des barrières partielles sur les modes pour différentes fréquences et rotations nécessiterait une étude plus poussée. De plus, nous avons considéré uniquement les barrières qui accompagnent l’îlot de période 2 mais la chaîne d’îlot de période 6 présente elle aussi des barrières partielles. Notons que cette chaîne d’îlot survit plus longtemps à la rotation dans le cas non axisymétrique.

Concernant les aspects numériques, l’absence de méthode complètement automatique pour identifier les modes dans les données est actuellement une limitation importante qui rend difficile d’explorer une large gamme de rotations. Pour les besoins de cette thèse, nous avons dû constituer une base de données numériques de modes



chaotiques. Cette base de données sera essentielle pour développer des méthodes automatiques de classification comme celle développée, actuellement pour les modes d'ilot, par [Mirouh et al. \(2019\)](#).



# Annexes

## A.1 Oscillations dans l'approximation adiabatique

L'état d'équilibre est donné, notamment, par les quantités  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  et  $X_i$  qui dépendent des paramètres fondamentaux de l'étoile et de son stade d'évolution. Pour trouver les équations qui définissent l'état d'équilibre, ou état stationnaire, il suffit de partir du système d'équations 3.1 - 3.5 puis d'imposer la condition  $\partial/\partial t = 0$ . Pour une étoile sans rotation, on obtient

$$0 = -\nabla p_0 - \rho_0 \nabla \phi_0, \quad (4.17)$$

$$0 = \rho_0 \epsilon_0 - \nabla \cdot \mathbf{F}_0, \quad (4.18)$$

$$\nabla^2 \phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (4.19)$$

$$p_0 = p_0(\rho_0, T_0, X_i). \quad (4.20)$$

On cherche les petites perturbations autour de l'état d'équilibre. On sépare les fonctions scalaires en une partie à l'équilibre  $f_0(\mathbf{x})$  et une perturbation  $f'(\mathbf{x}, t)$ . Pour obtenir les équations du modèle perturbé, on introduit 3.12 dans les équations du mouvement, on soustrait les équations du modèle à l'équilibre et on ne garde que les termes linéaires dans les quantités perturbées. Cela donne (Unno, 1989)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0, \quad (4.21)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p' + \rho_0 \nabla \phi' + \rho' \nabla \phi_0 = 0, \quad (4.22)$$

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial}{\partial t} (S' + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla S_0) = (\rho \epsilon)' - \nabla \cdot \mathbf{F}_R, \quad (4.23)$$

$$\nabla^2 \phi' = 4\pi G \rho', \quad (4.24)$$

$$p' = p'(\rho', T', X_i), \quad (4.25)$$

où  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  est le déplacement par rapport à la position d'équilibre.

En suivant Christensen-Dalsgaard (2003), nous allons voir que l'équation de l'énergie se simplifie dans le cas adiabatique. Pour cela, on l'écrit sous une forme alternative en partant du premier principe de la thermodynamique

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt}, \quad (4.26)$$

qui s'exprime par le fait que la chaleur échangée  $dq = TdS$  est égale à la variation de l'énergie interne  $E$  et du travail associé  $p dV$  associé à la compression ou la dilatation

de l'étoile, avec  $V = 1/\rho$  le volume spécifique. En utilisant l'équation de continuité on ré-écrit le terme  $dV/dt$ , ce qui amène à

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.27)$$

Puis on reformule cette expression à l'aide d'identités thermodynamiques (voir [Cox and Giuli \(1968\)](#)) dans des quantités plus commodes :

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho(\Gamma_3 - 1)} \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right), \quad (4.28)$$

où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  sont les exposants adiabatiques définis par

$$\Gamma_1 = \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_S \quad \Gamma_3 - 1 = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S. \quad (4.29)$$

Dans l'approximation adiabatique où l'on néglige les échanges de chaleur ( $dS/dt = 0$ ), l'Éq. 4.29 devient

$$\frac{dp}{dt} = \Gamma_1 \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (4.30)$$

L'approximation adiabatique est justifiée à l'intérieur de l'étoile où le transfert de chaleur, lié aux réactions nucléaires au cœur et au rayonnement dans les couches externes, a lieu sur des échelles de temps très grandes devant la période caractéristique des oscillations. À titre d'exemple, le temps caractéristique lié au transfert radiatif dans le Soleil est de l'ordre du temps de Kelvin-Helmoltz soit  $\sim 10^7$  années, contre quelques minutes pour une période d'oscillation. En revanche l'approximation adiabatique échoue à décrire la surface de l'étoile, où la densité est très faible et donc le transfert radiatif s'effectue sur des échelles de temps beaucoup plus courtes. Les perturbations adiabatiques sont donc solutions des équations suivantes

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0, \quad (4.31)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p' + \rho_0 \nabla \phi' + \rho' \nabla \phi_0 = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{dp'}{dt} = \Gamma_1 \frac{p'}{\rho'} \frac{d\rho'}{dt}. \quad (4.33)$$

Pour compléter le système, il faut ajouter l'équation de Poisson et imposer une équation d'état dont dépend l'exposant adiabatique  $\Gamma_1$ . Notons que la valeur de  $\Gamma_1$  dépend des abondances  $X_i$  et varie en général à l'intérieur de l'étoile.

## A.2 Approximation des rayons et formule de Tassoul

Cette annexe est un bref résumé du traitement asymptotique des modes p basé sur [Christensen-Dalsgaard \(2003\)](#). Une revue plus approfondie des méthodes asymptotiques appliquées aux oscillations stellaires est donnée dans [Gough \(1993\)](#).

Un mode d'oscillation est une onde stationnaire et peut être vu comme une superposition d'ondes progressives. Dans la limite des petites longueurs d'ondes (approximation WKB ou JWKB pour Jeffreys, Wentzel, Kramers et Brillouin), une onde progressive peut être considérée localement plane. La Fig. 4.20 illustre les chemins de propagation, dans le plan méridien d'une étoile, de deux ondes sonores de petite longueur d'onde. Dans ce contexte, les ondes sonores sont appelées *rayons acoustiques*, par analogie avec les rayons lumineux de l'optique géométrique.

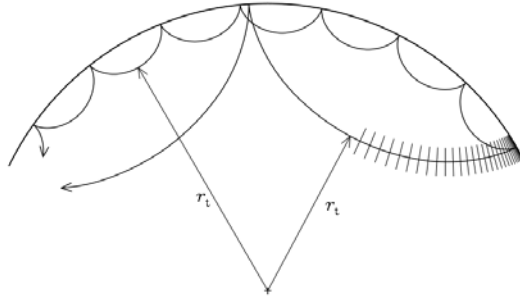


FIGURE 4.20 – Trajets de deux rayons acoustiques de degré  $l = 30$  (en profondeur) et  $l = 100$  (en surface). Les lignes transverses à la direction de propagation représentent les fronts d'onde. Ils se rapprochent les uns des autres près de la surface car la vitesse du son décroît fortement et entraîne localement un raccourcissement de la longueur d'onde. Les flèches pointent chacune un point de retournement. Figure tirée de (Christensen-Dalsgaard, 2003).

Le point de départ de l'analyse WKB consiste à chercher des solutions de l'équation 1.8 de la forme

$$\xi_r(r) = a(r) \exp(i\phi(r)), \quad (4.34)$$

où l'amplitude  $a(r)$  varie lentement tandis que la phase  $\phi(r)$  varie très rapidement, soit

$$k_r = \frac{d\phi}{dr} \gg 1, \quad (4.35)$$

où  $k_r$  est le nombre d'onde. Pour rendre cette condition explicite d'autres auteurs, e.g. (Gough, 1993), préfèrent écrire la phase comme  $\Lambda\phi(r)$  où le paramètre adimensionné  $\Lambda^{-1} = \lambda/H$  rend compte du fait que la longueur d'onde  $\lambda$  est petite devant l'échelle caractéristique de variation du milieu  $H$ . En insérant la fonction 4.34 dans l'équation d'onde, Éq. 1.8, on obtient en négligeant  $d^2a/dr^2 \ll k_r$  les deux conditions suivantes

$$k_r(r) = K(r)^{1/2}, \quad (4.36)$$

$$a(r) = |k_r|^{-1/2} = |K(r)|^{-1/4}, \quad (4.37)$$

où  $K(r)$  est donné par l'Éq. 1.9. On a ainsi deux solutions possibles

$$\xi_r = A|K(r)|^{-1/4} \cos \left( \int_{r_1}^{r_2} K(r')^{1/2} dr' + \varphi \right), \quad K(r) > 0, \quad (4.38)$$

$$\xi_r = |K(r)|^{-1/4} \left[ A_1 \exp \left( \int_{r_1}^{r_2} K(r')^{1/2} dr' \right) + A_2 \left( - \int_{r_0}^r K(r')^{1/2} dr' \right) \right], \quad K(r) < 0, \quad (4.39)$$

où  $r_1$  est un point de retournement interne (voir Fig. 4.20) correspondant au cas limite  $K(r) = 0$ , le point de retournement externe  $r_2$  étant choisi par défaut à la surface. Pris ensembles, les points de retournement forment une courbe que l'on appelle *une caustique* et qui délimite la zone de propagation. On peut définir des conditions aux bords en se rapprochant des points  $r_1$  et  $r_2$  tout en restant dans la zone d'oscillation. Les solutions s'expriment alors comme des fonctions d'Airy (voir e.g. Unno (1989)) et il devient possible de fixer  $\varphi$  par comparaison avec l'Éq. 4.38. On a ainsi obtenu une solution à proximité des deux points de retournement. En raccordant ces deux solutions et leurs dérivées en un point intermédiaire entre  $r_1$  et  $r_2$ , on obtient une condition sur la phase  $\phi(r)$

$$\int_{r_0}^r K(r)^{1/2} dr = \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (4.40)$$

où  $n$  est un entier. Comme le terme  $K(r)$  dépend implicitement de la fréquence de pulsation, l'Éq. 4.40 décrit la structure discrète du spectre d'oscillation. Dans le cas particulier des ondes de pression, le terme  $K(r)$  s'écrit comme

$$K(r) \approx \frac{1}{c_s^2} (\omega^2 - S_l^2). \quad (4.41)$$

On distingue deux cas limites dans le régime asymptotique : les modes  $\ell \gg n$  et à l'inverse les modes  $n \gg \ell$ . En partant de l'Éq. 4.41 et en se plaçant dans cette seconde limite, Vandakurov (1967) et Tassoul (1980) ont obtenu la célèbre formule de Tassoul

$$\omega_{n,\ell} \approx \left( n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha \right) \Delta\omega, \quad (4.42)$$

avec

$$\Delta\omega = 2\pi \left( 2 \int_0^R \frac{dr}{c_s} \right)^{-1}. \quad (4.43)$$

Cette formule rend compte des écarts réguliers observés dans le Soleil entre les modes d'ordre radial consécutif. Le tour de force de cette formule est de relier la grande séparation  $\Delta\omega$  au profil de la vitesse du son dans l'intérieur stellaire. On note que l'intégrale est calculée depuis le centre car dans la limite  $n \gg \ell$  les rayons pénètrent le milieu stellaire en profondeur. Le développement asymptotique se poursuit au second ordre, ce qui ajoute un terme dans la formule de Tassoul (Tassoul, 1980)

$$\omega_{n,\ell} \approx \left( n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha \right) \Delta\omega - (A\ell(\ell+1) - \delta) \frac{\Delta\omega^2}{\omega_{n,\ell}}, \quad (4.44)$$

où

$$A = \frac{1}{2\pi\Delta\omega} \left( \frac{c_s(R)}{R} - \int_0^R \frac{dc_s}{dr} \frac{d}{dr} \right). \quad (4.45)$$

La formule au second ordre fait apparaître une nouvelle quantité intéressante à exploiter. Il s'agit de la *petite séparation*  $\delta\omega_{n,\ell} = \omega_{n,\ell} - \omega_{n-1,\ell+2}$  définie par

$$\delta\omega_{n,\ell} \approx -(4\ell + 6) \frac{\Delta\omega}{2\pi\omega_{n,\ell}} \int_0^R \frac{dc_s}{dr} \frac{d}{dr}, \quad (4.46)$$

où on a négligé la vitesse du son en surface  $c_s(r = R)$ . La grande séparation est proportionnelle à la racine carrée de la densité moyenne  $M^{1/2} R^{3/2}$ . La petite séparation apporte une information complémentaire, puisqu'elle est sensible au degré d'évolution de l'étoile. Ceci s'explique par le fait que le cœur de l'étoile est le seul endroit où  $k_\perp \sim k_r$ . Dans les couches externes le mouvement est essentiellement radial.

La signification physique de la grande séparation et de la petite séparation apportée par la formule de Tassoul permet de placer les étoiles dans une diagramme analogue au diagramme de Hertzsprung-Russel, présenté sur la Fig. 4.21 (voir aussi White et al. (2011)).

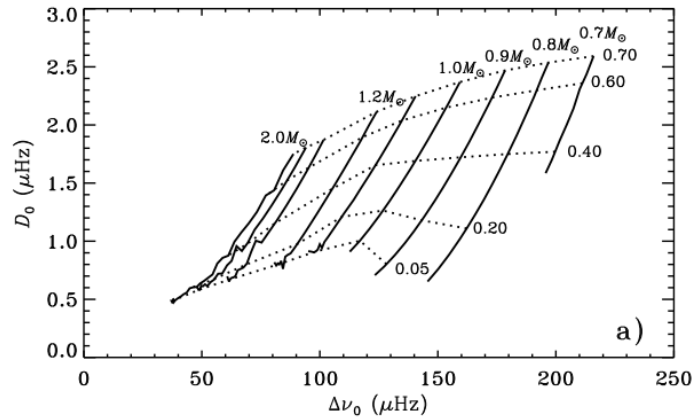


FIGURE 4.21 – Diagramme HR pour le couple de paramètres  $(\Delta\nu_0, D_0)$  où  $\Delta\nu_0$  est la grande séparation et  $D_0$  est une quantité reliée à la petite séparation par  $\langle \delta\nu_{n,\ell} \rangle_n \approx (4\ell + 6)D_0$ ,  $\langle \cdot \rangle_n$  étant une moyenne sur les valeurs de  $n$ . Figure tirée de Christensen-Dalsgaard (2003).

## B.1 Barrières partielles dans les zones ergodiques de l'espace des phases.

Dans le chapitre 4 nous avons montré qu'il y a des barrières partielles dans l'espace des phases du système que nous étudions. Nous avons en particulier calculé les flux de trajectoires à travers ces barrières partielles. Cette annexe présente une méthode précise pour déterminer les contours de la barrière partielle et le flux de trajectoires qui la traverse. Il est préférable d'avoir lu le chapitre 1 avant de lire cette annexe, car nous

faisons appel à diverses notions de la théorie des systèmes dynamiques Hamiltoniens.

Une barrière partielle est définie comme une surface traversée par un faible flux de trajectoires. Elles correspondent aux structures laissées par la destruction des tores invariant, c'est-à-dire les cantores et les chaînes d'îlots (Mackay et al., 1987; Meiss, 1992). Nous nous intéressons ici au cas des chaînes d'îlots. Lorsqu'un tore rationnel est détruit par une perturbation (voir section 2.1.4) il est remplacé par deux orbites, l'une stable et l'autre instable, dites de Poincaré-Birkhoff. Sur une section de Poincaré de dimension 2, l'orbite stable fait apparaître des points fixes elliptiques autour desquels se forme une chaîne d'îlots. L'intersection de la section de Poincaré avec l'orbite instable forme des points fixes hyperboliques dans la zone chaotique qui englobe la chaîne d'îlots. On peut associer à chaque point hyperbolique une direction stable  $E^S$  et une direction instable  $E^U$ . Elles correspondent aux vecteurs propres du Jacobien calculé au point fixe et qui possède deux valeurs propres, l'une positive correspondant à une direction de dilatation et l'autre négative correspondant à une direction de contraction. Ces directions propres peuvent être prolongées en deux courbes, appelées variété stable  $W^S$  (resp. instable  $W^U$ ), qui sont invariantes du point de vue de la dynamique (Ott, 2002). Soit une application  $M$  et un point fixe hyperbolique  $x_0$  de période  $p$  sous l'action de  $M$ , alors on peut définir  $W^S$  et  $W^U$  par

$$x \in W^S \implies M^{jp}x \rightarrow x_0 \text{ quand } j \rightarrow \infty, j \in \mathbb{N}, \quad (4.47)$$

$$x \in W^U \implies M^{jp}x \rightarrow x_0 \text{ quand } j \rightarrow -\infty, j \in \mathbb{N}. \quad (4.48)$$

Deux orbites ne peuvent pas se croiser dans l'espace des phases. Toutefois,  $W^S$  et  $W^U$  ne sont pas des orbites, mais des collections d'orbites et sont ainsi autorisées à se croiser (en revanche, deux variétés stables ou deux variétés instables ne peuvent pas se croiser car la préservation de l'aire ne serait pas respectée autour du point de croisement). On parle de *point homocline*<sup>11</sup> pour désigner un croisement entre la variété stable et instable.

Autour d'une intersection homocline,  $W^S$  et  $W^U$  peuvent former une barrière totale, ou *séparatrice*. Alternativement, elles forment des boucles appelées *turnstiles* comme montré sur la Fig. 4.22. Cette figure représente une section de Poincaré pour un oscillateur quartique (Bohigas et al., 1993). La barrière partielle, en trait plein, est construite en connectant des portions de variété stable et de variété instable. Le flux à travers la barrière est alors donné par l'aire des turnstiles (Meiss, 1992).

Pour construire une barrière partielle, il suffit donc de connaître les variétés stables et instables. Un algorithme décrit en détail dans (England et al., 2004), permet de construire les variétés stables et instables autour d'un point hyperbolique, connaissant les directions stables et instables  $E^S$  et  $E^U$ . Nous avons implémenté cet algorithme et l'avons testé sur l'application de Hénon (que l'on peut rendre Hamiltonienne en choisissant judicieusement les paramètres). La Fig. 4.23 montre  $W^S$  et  $W^U$  construits avec cet algorithme. Nous avons constaté que l'algorithme nécessite pour fonctionner de

11. S'il y a une intersection homocline, alors il peut être montré qu'il y en a nécessairement une infinité (Meiss, 1992). Les variétés stables et instables occupent ainsi tout le volume disponible, mais sont d'aire nulle (Meiss, 1992).



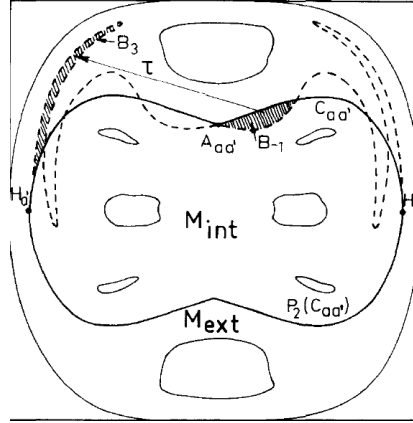


FIGURE 4.22 – Barrière partielle (trait plein) construite en connectant des segments de variétés stables et instables.  $H_a$  et  $H'_a$  sont les points hyperboliques associés aux deux plus grands îlots, en haut et en bas de la section de Poincaré. Image tirée de [Bohigas et al. \(1993\)](#)

connaître la position du point hyperbolique et les directions stables et instables avec une précision importante. Dans notre système, nous avons bien trouvé des orbites hyperboliques à proximité de l'îlot central, que nous pensons être à l'origine des barrières partielles. Nous n'avons toutefois pas pu déterminer leurs positions avec une précision suffisante pour construire la barrière partielle de cette manière.

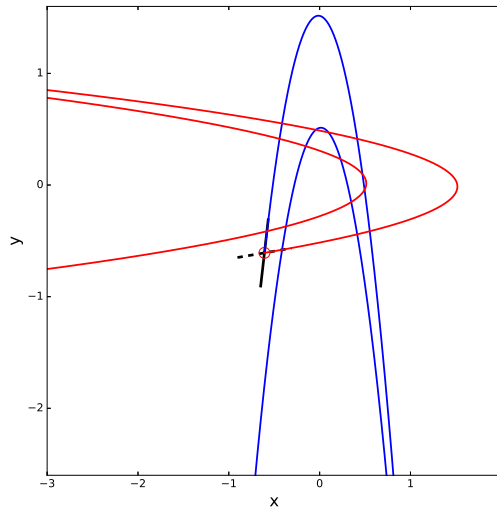


FIGURE 4.23 – Variétés stable (bleu) et instable (rouge) calculées pour l'application de Hénon en utilisant l'algorithme de [England et al. \(2004\)](#).

## B.2 Séries de modes chaotiques

Dans la publication II nous plaçons une portion du spectre chaotique à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  sur un diagramme échelle ( $\omega, \omega$  modulo  $\Delta_c$ ). Ce diagramme présente des séries de fréquences approximativement alignées verticalement. La Fig. 4.24 montre deux

exemples de telles séries de modes chaotiques. Les amplitudes de deux modes consécutifs ont des motifs très similaires. Toutefois, on constate une lente évolution si on compare les amplitudes de deux modes distants en fréquence de plusieurs fois  $\Delta_c$ .

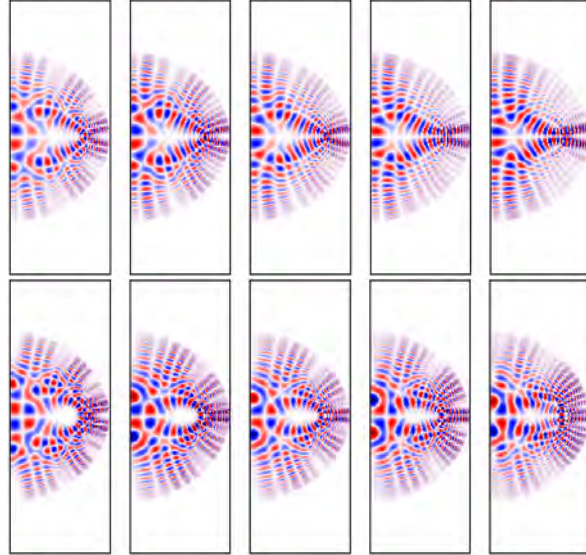


FIGURE 4.24 – Deux exemples de séries de modes chaotiques à  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ , représentés dans un plan méridien par leurs amplitudes. Le rang du haut correspond à une série de modes dont les fréquences valent, de gauche à droite,  $25.88\omega_p$ ,  $26.98\omega_p$ ,  $28.08\omega_p$ ,  $29.17\omega_p$  et  $30.26\omega_p$ . Le rang du bas correspond à une seconde série de modes, dont les fréquences valent, de gauche à droite,  $26.29\omega_p$ ,  $27.37\omega_p$ ,  $28.47\omega_p$ ,  $29.55\omega_p$  et  $30.63\omega_p$ .

# Publications

## Publication I

Correlations in the chaotic spectrum of pressure modes in rapidly rotating stars,  
B. Evano, B. Georgeot and F. Lignières,  
EPL (Europhysics Letters), 125, 49002 (2019).

# Correlations in the chaotic spectrum of pressure modes in rapidly rotating stars

BENJAMIN EVANO<sup>1,2</sup>, BERTRAND GEORGEOT<sup>2</sup> and FRANÇOIS LIGNIÈRES<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *IRAP, Université de Toulouse, CNRS, CNES, UPS - Toulouse, France*

<sup>2</sup> *Laboratoire de Physique Théorique, IRSAMC, Université de Toulouse, CNRS, UPS - Toulouse, France*

received 19 November 2018; accepted in final form 14 February 2019

published online 22 March 2019

PACS 97.10.Sj – Pulsations, oscillations, and stellar seismology

PACS 05.45.Mt – Quantum chaos; semi-classical methods

PACS 97.10.Kc – Stellar rotation

**Abstract** – The oscillation spectrum of pressure waves in stars can be determined by monitoring their luminosity. For rapidly rotating stars, the corresponding ray dynamics is mixed, with chaotic and regular zones in phase space. Our numerical simulations show that the chaotic spectra of these systems exhibit strong peaks in the autocorrelation which are at odd with random matrix theory predictions. We explain these peaks through a semiclassical theory based on the peculiar distribution of the actions of classical periodic orbits. Indeed this distribution is strongly bunched around the average action between two consecutive rebounds and its multiples. In stars this phenomenon is a direct consequence of the strong decrease of the sound speed towards the star surface, but it would arise in any other physical system with a similar bunching of orbit actions. The peaks discussed could be observed by space missions and give insight into the star interiors.

 Copyright © EPLA, 2019

**Introduction.** – Most of the information that we can obtain from stars stems from the light that they emit. Variations of this light can be monitored for many stars, enabling to detect periodic patterns produced by oscillation modes of stars. In the case of the Sun, it has been possible to theoretically construct these modes and compare them with observations, giving crucial pieces of information on the internal structure [1]. Ultra-precise photometric data from the recent space missions COROT [2] and Kepler [3] include many rapidly rotating stars, for which a theory of oscillation modes is needed to infer physical properties of their internal structure [4].

Stellar oscillations are divided into two categories that are separated in frequencies, with gravity modes below the Brunt-Väisälä frequency and pressure (acoustic) modes in the high part of the frequency spectrum. Recently, ray dynamics and semiclassical techniques have been used to describe oscillation modes in rapidly rotating stars [5,6]. Indeed, these oscillations have a short-wavelength limit in the same way as quantum or electromagnetic waves do, and the ray dynamics is also governed by Hamiltonian equations of motion [7]. In the case of acoustic waves, which are the focus of this letter, numerical simulations of this dynamics for a polytropic stellar model showed that when the rotation rate increases, stable and

chaotic regions coexist in the phase space. As a consequence, the stationary acoustic modes can be divided into modes localized in the regular zones or in the chaotic zones, with markedly different properties [5]. For regular island modes an asymptotic formula was built in [8], showing that they are characterized by regular spacings. Chaotic modes, which have been studied in the context of quantum mechanics by the field of quantum chaos [9], are expected to be distributed in accordance with the predictions of random matrix theory (the relevant matrix ensemble for our system is the Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE)) [10,11], and should not display regularities.

In this letter we show that chaotic modes in models of rapidly rotating stars display pseudo-regularities which can be clearly seen from peaks in the autocorrelation of the spectra. They could correspond to peaks extracted from the observed frequency spectra of  $\delta$  Scuti stars [12], a class of rapidly rotating pulsating stars. Understanding their origin would then be key to derive physical constraints on star interiors. These peaks are also of interest from a theoretical standpoint, since they are unseen in the autocorrelation of GOE spectra [11]. Here, we explain the pseudo-regularities in the chaotic mode spectrum from a theory based on the general properties of acoustic rays in

stars, coupled with the semiclassical theory of correlations in chaotic spectra [13].

**Pseudo-regularities in the chaotic spectrum of stars.** – To model the star, we study a self-gravitating monoatomic perfect gas of adiabatic exponent  $\Gamma = 5/3$  in solid body rotation. The equilibrium model is a simplified model, where the pressure and density satisfy the relation  $P \propto \rho^{1+1/N}$  with an effective polytropic index  $N = 3$ . The acoustic ray dynamics is derived making standard approximations valid for high frequencies: we neglect the Coriolis force, the perturbations of the gravitational potential and the effect of viscosity and thermal diffusivity. In the linear limit, one obtains a Helmholtz-type equation. The pressure perturbations  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  satisfy

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_c^2 \right) \Psi(\mathbf{x}, t) - c_s^2 \nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1)$$

where  $c_s$  is the sound speed, that decreases from the center to the surface as the square root of the temperature and  $\omega_c$  is a cutoff frequency which increases sharply close to the boundary, confining the wave inside the star [14].

We seek solutions of the form  $\Psi = e^{i\Lambda\phi(\mathbf{x}, t)}$  where  $\Lambda^{-1}$  is a small dimensionless parameter and get an equation for the phase  $\phi(\mathbf{x}, t)$  [7]:

$$-\Lambda \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = (\omega_c^2 + c_s^2 k^2)^{1/2} = H, \quad (2)$$

where  $\mathbf{k} = \nabla\phi$  is the wave vector and  $H$  is the ray dynamics hamiltonian. As is usual in stellar physics [4], rotation frequencies will be given in units of the Keplerian rotation rate  $\Omega_k = (GM/R_{eq}^3)^{1/2}$  where the centrifugal acceleration equates gravity at the equator,  $G$  being Newton's constant,  $M$  the mass and  $R_{eq}$  the equatorial radius of the star. We will express acoustic frequencies in terms of  $\omega_p = (GM/R_p^3)^{1/2}$ , where  $R_p$  is the polar radius. Because  $R_p$  varies slowly with rotation, the choice of  $\omega_p$  is well suited to compare acoustic frequencies at different rotation rates.

The equations of motion are solved using a 5th-order Runge-Kutta method. As the system is cylindrically symmetric, the ray dynamics can be reduced to a two-dimensional problem [14]. In the particular case of axisymmetric modes, acoustic rays propagate in a meridional plane of the star. The study of the dynamics through the Poincaré Surface of Section (PSS) reveals three main types of structures for a wide range of rotation rates (see fig. 1): stable islands are built around periodic orbits, whispering gallery rays remain close to the surface and chaotic ergodic trajectories fill all available space. Stationary modes are associated to these different phase space regions. As presented in [14], modes associated with the stable islands have simple spectra of the form  $\omega_{nl} = n\delta n + \ell\delta\ell + \alpha$  and in the case of the most important 2-period island modes this formula was explicitated by an asymptotic theory [8].

By contrast, chaotic modes associated with the ergodic phase space region are not predicted in general to follow any simple asymptotic formula. According to the

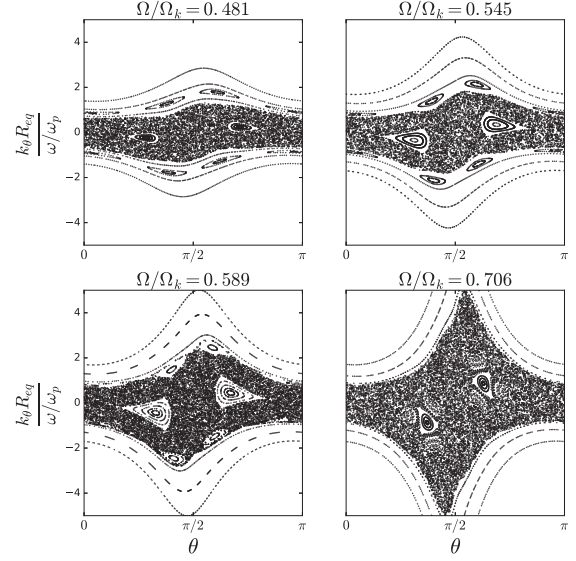


Fig. 1: PSS of acoustic rays at four different rotations. Each point corresponds to the crossing of an outgoing ray with a curve at constant distance from the star surface,  $\theta$  being the colatitude and  $k_\theta$  the wave vector component parallel to the curve at the crossing point.

Bohigas-Giannoni-Schmit conjecture [10] chaotic mode spectra should have correlations given by GOE, that have the property of repelling each other at short distance. Conversely, generic regular modes should follow a Poisson distribution with no level repulsion [15]. Using a two-dimensional code that computes the stationary oscillations of a rotating star [16] we produced the frequency spectra of the polytropic model at five different rotations (namely the four rotations shown in fig. 1 and additionally  $\Omega/\Omega_k = 0.658$ , whose PSS is very similar to panel c but with a disappearing 6-periodic island chain). All modes are axisymmetric and either symmetric (even) or antisymmetric (odd) with respect to the equator. We then selected the chaotic modes by removing from the full spectra the island modes and whispering gallery modes<sup>1</sup>. In fig. 2 we display the distribution of the ratio of consecutive level spacings  $r_n = (\omega_{n+1} - \omega_n)/(\omega_n - \omega_{n-1})$  of chaotic modes and in table 1 we indicate the average value of  $\tilde{r}_n = \min(r_n, 1/r_n)$  [17,18]. The main panel of fig. 2 shows the aggregated ratio distributions of four rotations. This procedure is standard to smooth out the statistical fluctuations due to small datasets [19]. The resulting distribution is in good agreement with the GOE prediction for chaotic systems. This is not the case for the  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  spectrum, shown in the inset, as the ratio distribution does not show level repulsion at small  $r$  values and the averaged  $\tilde{r}$  falls between the GOE and Poisson values. Such anomalous statistics is often associated to the fact that

<sup>1</sup>The island modes were removed by hand using the known formula for their frequencies as a guide. The whispering gallery modes were removed automatically using the fact that their spherical harmonic decomposition is dominated by large degree components.

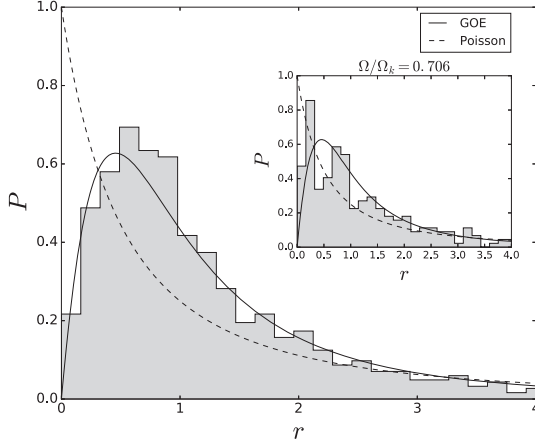


Fig. 2: The ratio distribution  $P(r)$ , with 1174 levels from seven independent spectra:  $\Omega/\Omega_k = 0.481$  (206 odd levels),  $\Omega/\Omega_k = 0.545$  (223 odd levels, 105 even levels),  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  (217 odd levels, 96 even levels),  $\Omega/\Omega_k = 0.658$  (207 odd levels, 120 even levels). The solid line is the GOE distribution and the dashed line is the Poisson distribution. The special case  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ , with 283 odd levels, is shown in the inset.

Table 1: Average value of  $\tilde{r}$ .

Poisson	$\approx 0.38629$
GOE	$\approx 0.53590$
$\Omega/\Omega_k = 0.706$	$\approx 0.4743$
Other rotations	$\approx 0.5618$

the spectrum contains independent subspectra. We will explain this peculiarity below by the presence of partial barriers in the chaotic zone.

The ratio of consecutive level spacings is a short-range quantity; to investigate the correlations at longer range we computed the two-point autocorrelation function  $R_2(\xi) = \langle d(\omega - 1/2\xi) d(\omega + 1/2\xi) \rangle$ , where  $d(\omega)$  is the spectral density and  $\langle \cdot \rangle$  is a frequency average defined by  $\langle f \rangle = \int f d\omega$ . As shown in fig. 3, a deviation from GOE statistics [11] appears in the form of a peak centered at value  $\Delta \simeq 1.15\omega_p$  (panel (a)). This peak is robust in the sense that it appears at every rotation rate, though its position shifts slightly (see fig. 3, panels (b), (c), (d)). Other peaks emerge from the noise, especially as rotation increases (fig. 3, panels (c) and (d)) around  $1/3\Delta$  and  $4/3\Delta$ . In the following, we will explain the origin of the most robust peaks and their evolution with respect to rotation, using semiclassical methods. We will also link the presence of the additional peaks to the existence of partial barriers.

**Semiclassical analysis.** – Semiclassics (here large- $\omega$  limit) is built on the Gutzwiller trace formula, which relates the spectral density to a sum over periodic orbits of the system [9], and was introduced in the framework of quantum mechanics. We have adapted the derivation to the case of acoustic modes; it leads to the formula  $d(\omega) - \bar{d}(\omega) = \text{Re} \sum_i A_i(\omega) e^{iS_i(\omega)}$  where  $i$  labels

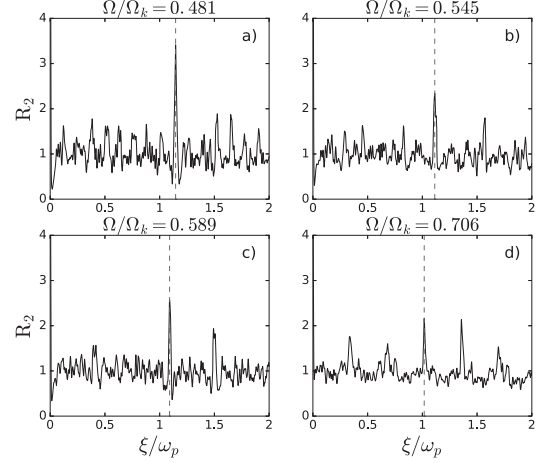


Fig. 3: Frequency autocorrelations computed at four rotations for chaotic modes, using only one symmetry class (odd modes) since odd and even spectra are independent. Datasets: (a) 206 levels from  $28.35 \omega_p$  to  $46.89 \omega_p$ , (b) 223 levels from  $28.15 \omega_p$  to  $44.09 \omega_p$ , (c) 217 levels from  $26.02 \omega_p$  to  $40.29 \omega_p$  and (d) 283 levels from  $23.57 \omega_p$  to  $36.22 \omega_p$ . Dashed lines mark the position of the most robust peak, at much longer range than the mean level spacing ( $\approx 0.09 \omega_p$ ).

periodic orbits,  $S$  is the action,  $A$  is an amplitude, supposed to be slowly varying with  $\omega$ , which depends on the length and stability of the orbit and  $\bar{d}(\omega)$  is the smoothed density. In our system the action can be expressed as  $S = \omega \int ds \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}/c_s$ , where  $s$  is the curvilinear coordinate along a given ray path. Therefore  $T = \partial S/\partial \omega$  corresponds to the travel time (or acoustic time) of a ray. In order to relate the autocorrelation of the chaotic spectra to the acoustic ray dynamics, we follow the method of Berry [13], which uses the so-called diagonal approximation. The idea is to consider the form factor:

$$K(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\xi T) C(\xi) \quad (3)$$

which is the Fourier transform of the autocorrelation:

$$\begin{aligned} C(\xi) &= \left\langle [d(\omega - 1/2\xi) - \bar{d}(\omega - 1/2\xi)] \right. \\ &\quad \times [d(\omega + 1/2\xi) - \bar{d}(\omega + 1/2\xi)] \left. \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \text{Re} \sum_i A_i e^{iS_i(\omega - 1/2\xi)} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left( \text{Re} \sum_j A_j e^{iS_j(\omega + 1/2\xi)} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

For short times, the frequency average eliminates the off-diagonal terms  $i \neq j$  by phase incoherence, allowing to approximate the form factor as  $K(T) \approx \sum_j A_j^2 \delta(T - T_j)$ , *i.e.*, the density of periodic orbits weighted with intensities  $A_j^2$  [13,20]. This approximation fails for long times, typically higher than the Ehrenfest time [21], because there are pairs of orbits with very close actions  $S_i \approx S_j$  and higher-order terms need to be computed [22–25].



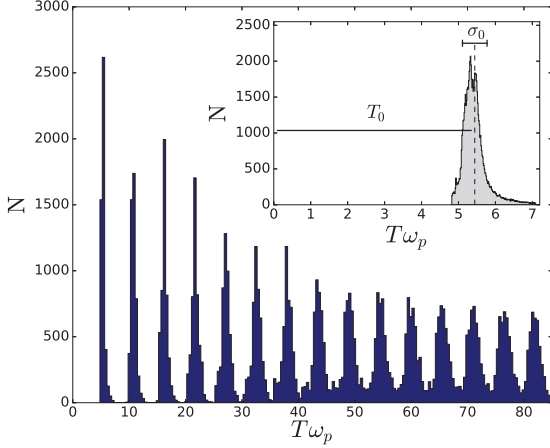


Fig. 4: Number of  $n$ -chord trajectories, with  $n = 1, \dots, 15$ , vs. their travel time  $T$  at rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ . The  $n$ -chord samples contain 4750 chords each. The inset shows the 1-chord distribution in more detail, with 70000 chords. The dashed line marks its mean value, very close to  $T_0$ .

The next step of Berry's method is to use the general result of Hannay and Ozorio de Almeida [26] which implies that  $\sum_j A_j^2 \delta(T - T_j) \propto T$  for sufficiently large  $T$ . To make this result explicit we express the amplitude and the density as functions of the metric and topological entropies  $h_M, h_T$ :  $A(T) \propto T e^{-(1/2)h_M T}$  and  $\sum_j \delta(T - T_j) \rightarrow \rho(T) \approx (1/T) e^{h_T T}$  and suppose these two entropies to be equal [20,27]. These formulas give  $K(T) \rightarrow A^2(T) \rho(T) \propto 2T$ , which is the GOE prediction at leading order (the factor of two comes from the fact that orbits are twice degenerate due to time-reversal symmetry [13]). In our system, however, the peculiar distribution of periodic orbits  $\rho(T)$  modifies the form factor behavior.

Like classical trajectories in billiards, acoustic rays bounce on the reflective caustic close to the surface. Thus any periodic orbit can be divided into chords, each chord connecting two successive surface bouncing points. Periodic orbits thus belong to a class of trajectories that we call  $n$ -chords, whose endpoints have to lie on the surface. While it is extremely difficult to find all periodic orbits of our system, we can nevertheless infer some of their properties from the study of large samples of  $n$ -chord trajectories.

Figure 4 shows the distribution of travel times for  $n$ -chords in the chaotic region of phase space at rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ . In stars, the travel time is not proportional to the geometric length, as, *e.g.*, in billiards. Indeed, since the sound velocity is much smaller near the surface of the star, all trajectories spend much more time near the surface than in the core. This results in a travel time distribution that concentrates around specific values evenly spaced out (see fig. 4). As the number of chords increases the individual packets grow wider (similarly to the law of large numbers), until the width becomes much larger than the interpeak distance, and the distribution turns into a smooth curve. This is quantified by the ratio

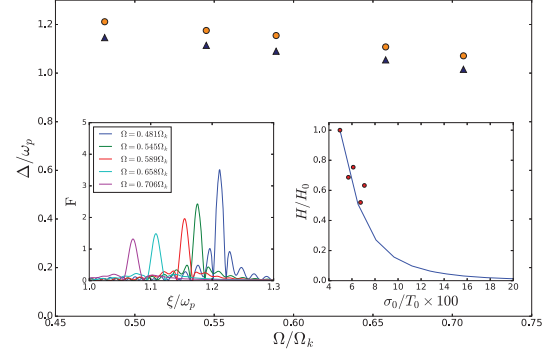


Fig. 5: Theoretical value of  $\Delta/\omega_p$  (circles) compared to the numerical peak's position (triangles) for five rotation rates. Left inset: theoretical autocorrelations around the main peak, from left to right the rotation rate decreases. Right inset: the solid line shows the variation of the normalized peak height  $H/H_0$ , where  $H_0$  is the peak height at  $\Omega/\Omega_k = 0.481$ , with increasing  $\sigma_0$  at fixed  $T_0$ . The points show the corresponding values obtained from the simulated spectra.

$\sigma_0/T_0$ ,  $\sigma_0$  being the standard deviation of the first packet and  $T_0$  the average distance between the mean values of consecutive packets. In the case of a billiard whose boundary is shaped like our star surface,  $\sigma_0/T_0 \approx 0.32$  meaning that the packet structure disappears after a few rebounds. In the stellar case  $\sigma_0/T_0$  grows with rotation but remains below 0.08. The packets are thus discernable for much longer times.

We model the distribution of fig. 4 as  $P(T) = \sum_n P_n(T)$ , with  $P_n(T)$  the probability distribution of  $n$ -chords travel times:

$$P_n(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n} \sigma_0} \exp\left(-\frac{(T - nT_0)^2}{2(\sqrt{n} \sigma_0)^2}\right), \quad (5)$$

where the values of  $T_0$  and  $\sigma_0$  are taken from the numerical simulations of acoustic rays. We checked that the packets have indeed a mean value close to  $nT_0$  and that their standard deviation grows as  $\sqrt{n}\sigma_0$ . Physically,  $T_0$  is the characteristic travel time of a single chord. Thus,  $T_0$  and  $\sigma_0$  are directly related to the star volume and the sound speed profile in the star interior. In particular, the small variance of the travel times is a consequence of the strong decrease of the sound speed near the surface. As mentioned before we cannot find directly the periodic orbits, but we claim that the constraints imposed by  $P(T)$  are strong enough to explain the correlations seen in the spectra.

To take into account the exponential growth rate of the number of periodic orbits with  $T$ , the density of periodic orbits in our system is thus modeled as  $\rho(T) \propto (1/T) e^{h_T T} \times P(T)$ . Assuming  $A(T) \propto T e^{-(1/2)h_M T}$  gives the result

$$K(T) \rightarrow A^2(T) \rho(T) \propto T P(T). \quad (6)$$

As the variance of the  $P_n(T)$  grows with  $n$ ,  $P(T)$  becomes flat for sufficiently long times. For such long times we

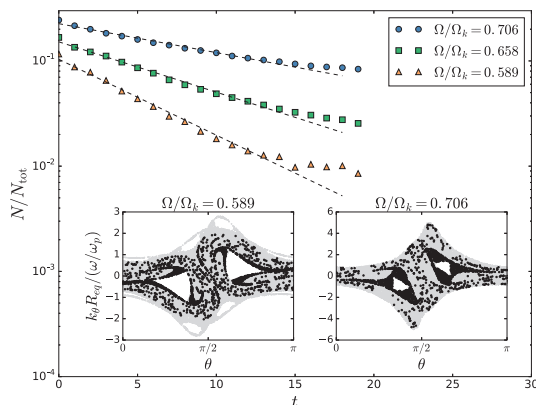


Fig. 6: Monte Carlo simulations showing  $N/N_{tot}$  vs.  $t$  for different rotations, where  $t$  is a discretized time (number of crossing of rays with the PSS),  $N_{tot}$  the number of initial chaotic trajectories and  $N$  the number of trajectories that remain in the partial barrier zone. The intercept is representative of the relative area and the slope gives the escape rate  $\lambda$ , *i.e.*, the outward flux:  $\lambda(\Omega/\Omega_k = 0.589) \simeq 0.17$ ,  $\lambda(\Omega/\Omega_k = 0.658) \simeq 0.11$  and  $\lambda(\Omega/\Omega_k = 0.706) \simeq 0.06$ . Insets are snapshots of the time evolution showing the zones delimited by partial barriers.

recover the sum rule [26]  $\sum_j A_j^2 \delta(T - T_j) \propto T$ , which is consistent with the existence of GOE statistics at short spectral distance (fig. 2). For shorter times  $P(T)$  creates a specific regime departing from GOE.

The Fourier transform

$$F(\xi) = 1/(\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} dT \exp(-i\xi T) TP(T)$$

is shown in the left inset of fig. 5 for different rotations. It shows a peak, as in the spectral data (fig. 3), that moves towards low frequencies for increasing rotation. The peaks extracted from the numerical spectral data and obtained from semiclassical theory are in good agreement (fig. 5, main panel). The discrepancy of about 5% is similar to what was obtained for island modes in [8], and can be attributed to the relatively low values of numerically computed frequencies, as the theoretical values are derived under the semiclassical (high-frequency) approximation. The model also predicts that the peak width should show a slow increase with rotation, as can be seen in the left panel of fig. 5. In the right panel, we show that the peak height decreases rapidly with  $\sigma_0/T_0$ ; this explains why the peak is not usually visible in chaotic systems with large  $\sigma_0/T_0$ .

**Other peaks.** – The semiclassical theory outlined above explains the origin of the main peak in the autocorrelation. Other peaks are sometimes visible in the autocorrelations of fig. 3, especially for the rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  where  $P(r)$  deviates strongly from GOE (see fig. 2). We attribute these peaks to the presence of partial barriers in the chaotic zone around the main stable island. Partial barriers isolate some zones of phase space, from which trajectories escape more slowly than in the rest of the

chaotic zone [28,29]. To find them we compute trajectories with initial condition near the main island and monitor their evolution on the PSS. Without barrier all points would spread ergodically, however fig. 6 shows that a subset of points remains near the island for a long time. Close to  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ , the region enclosed by partial barriers grows in size and traps trajectories more efficiently. For the relatively low-frequency waves here considered, they will act as barriers and quantize independently a subset of modes. This will weaken the level repulsion at short spectral distance as seen in fig. 2. Besides, as trapped trajectories revolve around a 6-periodic orbit, we expect the modes to quantize like island modes [8], leading to a  $\Delta/3$  regularity.

**Conclusion.** – In this letter, we have shown that specificities in the distribution of the actions of periodic orbits can create a peak in the autocorrelation of chaotic spectra. Such a peak can potentially be detected in the frequency spectrum of chaotic pressure modes in rapidly rotating stars. Recent data have confirmed the existence of peaks in the autocorrelation spectrum of the rapidly rotating  $\delta$  Scuti stars [12]. They have been attributed so far to regular island modes but our results indicate that chaotic modes should also produce such peaks. These two kinds of peaks should be close<sup>2</sup> but still distinct at most rotation rates. Whether these two peaks could be discernable in observed data remains to be investigated. In addition to astrophysical observations, the phenomenon described here could be tested with an experimental setup such as, *e.g.*, electromagnetic waves in a cavity with a strong gradient of the refractive index along the radial direction.

\*\*\*

We thank CALMIP for providing computational resources and the Université Paul Sabatier for funding. This work has made use of the TOP code developed by D. REESE and of a user-friendly version of this code developed by B. PUTIGNY.

## REFERENCES

- [1] CHRISTENSEN-DALSGAARD J., *Rev. Mod. Phys.*, **74** (2002) 1073.
- [2] BAGLIN A., AUVERGNE M., BOISNARD L. *et al.*, in *36th COSPAR Scientific Assembly Plenary Meeting*, Vol. **36** 2006, meeting abstract from CD-ROM, No. 3749.
- [3] BORUCKI W. J., KOCH D., BASRI G. *et al.*, *Science*, **327** (2010) 977.

<sup>2</sup>The position of the peak created by island modes is the inverse of the travel time along a specific regular trajectory at the center of the island [8]. The peak of chaotic modes corresponds to the inverse of a mean travel time between two rebounds for chaotic trajectories. In view of the 1-chord distribution shown in the inset of fig. 4 these two quantities should be close, which is confirmed by frequency computations.



- [4] AERTS C., CHRISTENSEN-DALSGAARD J. and KURTZ D. W., in *Astronomy and Astrophysics Library* (Springer, The Netherlands) 2010.
- [5] LIGNIÈRES F. and GEORGEOT B., *Phys. Rev. E*, **78** (2008) 016215.
- [6] PRAT V., LIGNIÈRES F. and BALLOT J., *Astron. Astrophys.*, **587** (2016) A110.
- [7] GOUGH D. O., in *Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics*, edited by GIANNONI M.-J., VOROS A. and ZINN-JUSTIN J. (Elsevier, Amsterdam) 1993, pp. 400–560.
- [8] PASEK M., GEORGEOT B., LIGNIÈRES F. and REESE D. R., *Phys. Rev. Lett.*, **107** (2011) 121101.
- [9] GUTZWILLER M. C., in *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, New York) 1990.
- [10] BOHIGAS O., GIANNONI M. J. and SCHMIT C., *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) 1.
- [11] BOHIGAS O., in *Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics*, edited by GIANNONI M.-J., VOROS A. and ZINN-JUSTIN J. (North-Holland, Amsterdam) 1991, pp. 87–199.
- [12] GARCÍA HERNÁNDEZ A., MARTÍN-RUIZ S., MONTEIRO M. J. P. F. G., SUÁREZ J. C., REESE D. R., PASCUAL-GRANADO J. and GARRIDO R., *Astrophys. J. Lett.*, **811** (2015) L29.
- [13] BERRY M. V., *Proc. R. Soc. Lond. A*, **400** (1985) 229.
- [14] LIGNIÈRES F. and GEORGEOT B., *Astron. Astrophys.*, **500** (2009) 1173.
- [15] BERRY M. V. and TABOR M., *Proc. R. Soc. Lond. A*, **356** (1977) 375.
- [16] REESE D., LIGNIÈRES F. and RIEUTORD M., *Astron. Astrophys.*, **455** (2006) 621.
- [17] OGANESEYAN V. and HUSE D. A., *Phys. Rev. B*, **75** (2007) 155111.
- [18] ATAS Y. Y., BOGOMOLNY E. B., GIRAUD O. and ROUX G., *Phys. Rev. Lett.*, **110** (2013) 084101.
- [19] HAQ R. U., PANDEY A. and BOHIGAS O., *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982) 1086.
- [20] BERRY M. V., in *Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics*, edited by GIANNONI M.-J., VOROS A. and ZINN-JUSTIN J. (North-Holland, Amsterdam) 1991, pp. 251–303.
- [21] BOGOMOLNY E. B., GEORGEOT B., GIANNONI M. J. and SCHMIT C., *Phys. Rep.*, **291** (1997) 219.
- [22] BOGOMOLNY E. B. and KEATING J. P., *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 1472.
- [23] SIEBER M. and RICHTER K., *Phys. Scr.*, **T90** (2001) 128.
- [24] HEUSLER S., MÜLLER S., ALTLAND A., BRAUN P. and HAAKE F., *Phys. Rev. Lett.*, **98** (2007) 044103.
- [25] MÜLLER S., HEUSLER S., ALTLAND A., BRAUN P. and HAAKE F., *New J. Phys.*, **11** (2009) 103025.
- [26] HANNAY J. H. and OZORIO DE ALMEIDA A. M., *J. Phys. A*, **17** (1984) 3429.
- [27] ADLER R., DOWNAROWICZ T. and MISIUREWICZ M., *Scholarpedia*, **3** (2008) 2200.
- [28] BOHIGAS O., TOMSOVIC S. and ULLMO D., *Phys. Rep.*, **223** (1993) 43.
- [29] SHIM J.-B., WIERSIG J. and CAO H., *Phys. Rev. E*, **84** (2011) 035202.



## Publication II

Regularities in the spectrum of chaotic p-modes in rapidly rotating stars,  
B. Evano, F. Lignières and B. Georgeot,  
*Astronomy & Astrophysics*, 631, A140 (2019).

# Regularities in the spectrum of chaotic p-modes in rapidly rotating stars

Benjamin Evano<sup>1,2</sup>, François Lignières<sup>1</sup>, and Bertrand Georgeot<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie, Université de Toulouse, CNRS, CNES, UPS, France

<sup>2</sup> Laboratoire de Physique Théorique, IRSAMC, Université de Toulouse, CNRS, UPS, France

Received 5 August 2019 / Accepted 20 September 2019

## ABSTRACT

**Context.** Interpreting the oscillations of massive and intermediate mass stars remains a challenging task. In fast rotators, the oscillation spectrum of p-modes is a superposition of sub-spectra which corresponds to different types of modes, among which island modes and chaotic modes are expected to be the most visible. This paper is focused on chaotic modes, which have not been thoroughly studied before.

**Aims.** We study the properties of high frequency chaotic p-modes in a polytropic model. Unexpected peaks appear in the frequency autocorrelations of the spectra. Our goal is to find a physical interpretation for these peaks and also to provide an overview of the mode properties.

**Methods.** We used the 2D oscillation code "TOP" to produce the modes and acoustic ray simulations to explore the wave properties in the asymptotic regime. Using the tools developed in the field of quantum chaos (or wave chaos), we derived an expression for the frequency autocorrelation involving the travel time of acoustic rays.

**Results.** Chaotic mode spectra were previously thought to be irregular, that is, described only through their statistical properties. Our analysis shows the existence, in chaotic mode spectra, of a pseudo large separation. This means that chaotic modes are organized in series, such that the modes in each series follow a nearly regular frequency spacing. The pseudo large separation of chaotic modes is very close to the large separation of island modes. Its value is related to the sound speed averaged over the meridional plane of the star. In addition to the pseudo large separation, other correlations appear in the numerically calculated spectra. We explain their origin by the trapping of acoustic rays near the stable islands.

**Key words.** Asteroseismology - Waves - Chaos - Stars: oscillations - Stars: rotation

## 1. Introduction

Despite the many successful advancements made in stellar seismology, we are still unable to unlock most of the information contained in the acoustic oscillations of typical massive and intermediate mass stars. The observed pulsational behavior of these stars in the range of acoustic frequencies is diverse and has so far resisted a meaningful empirical classification. In addition to evolutionary effects, both the nonlinear processes that set the mode amplitudes and the sensitivity of the spectrum organization to the unknown rotation rate contribute to the observed diversity (Bowman & Kurtz 2018).

Progress in modeling the rotational effects together with the flow of high quality data from ultra precise space photometry missions, nevertheless, revive the interest for the seismology of massive and intermediate mass stars. An important step was the detection of regular frequency patterns analogous to the solar-like large separation in  $\delta$  Scuti stars (García Hernández et al. 2009; García Hernández et al. 2013; García Hernández et al. 2015; Paparó et al. 2016; Michel et al. 2017). These patterns were predicted from the first oscillation model, that took realistic centrifugal distortion into account (Lignières et al. 2006), up to the more realistic models to date (Reese et al. 2017). Further progress is expected from TESS and PLATO missions that will include bright stars that can be better constrained through spectroscopy.

To model the acoustic spectrum of rapidly rotating stars, 2D oscillation codes that take full account of the effect of rotation on the oscillations were developed (Reese et al. 2006, 2009; Ouazzani et al. 2012). They can be run for different models of centrifugally deformed stars, from polytropic models (Reese et al. 2006) to more sophisticated ones (Reese et al. 2009; Ouazzani et al. 2015). Exploring the acoustic spectrum as a function of the star rotation is not a straightforward process, in particular, because the density of frequencies increases with the numerical resolution and the mode classification can be tedious (Ballot et al. 2013). First attempts were restricted to low spherical-harmonic degree modes, which were followed by progressively increasing the rotation rate (Lignières et al. 2006; Reese et al. 2006, 2008; Pasek et al. 2012). More complete spectra have then been obtained at fixed rotation rates (Lignières & Georgeot 2009; Reese et al. 2009; Ouazzani et al. 2015; Reese et al. 2017). An automatic classification of the computed mode using neural network methods has recently been proposed (Mirouh et al. 2019).

Understanding the spectrum organization is key to constructing seismic tools, the detection of regular patterns in  $\delta$  Scuti stars being a good example. The structure of the spectrum is expected to best reveal itself in the asymptotic regime, that is, at high-frequencies for acoustic modes. This motivates high-frequency computations even if massive and intermediate mass stars oscillate at lower acoustic frequencies. The asymptotic regime is also amenable to theoretical descriptions. In the short wavelength

"WKB" limit, acoustic waves are described by rays whose propagation obeys Hamiltonian dynamics. In Lignières & Georgeot (2009), the acoustic ray dynamics of rapidly rotating stars was studied and semiclassical concepts and methods developed in quantum physics were used to infer the asymptotic properties of the associated acoustic spectrum. Reflecting the phase space structure, different families of modes were identified. Above some rotation, two families are most likely to be observed : the 2-period island modes and the chaotic modes. The first family was studied in detail through numerical computations (Lignières et al. 2006; Reese et al. 2008, 2009; Ouazzani et al. 2015) and semi-analytical models (Pasek et al. 2011, 2012). These modes show regular frequency spacings and should be the most visible in the observed spectra. They have been cited to explain the frequency patterns observed in some  $\delta$  Scuti stars (García Hernández et al. 2015).

Chaotic modes are called chaotic because they result from the constructive interference of waves which, in the short wavelength limit, have chaotic trajectories. They were first studied in quantum physics, showing distinctive features, such as ergodicity or the universality of the nearest neighbor statistics of their spectrum. Lignières & Georgeot (2009) identify  $\sim 200$  axisymmetric chaotic modes at a given rotation rate and verify that they follow the expected statistics.

In this paper the asymptotic properties of chaotic acoustic modes in rapidly rotating stars is investigated in detail. We construct a large set of high-frequency chaotic modes, computed at various rotation rates and azimuthal numbers  $m$ , analyze the mode properties, and interpret them using semiclassical methods.

Among these properties, the presence of peaks in the autocorrelation of the chaotic mode spectrum had not been reported in the experimental or modeled wave systems considered in the fields of quantum chaos. This justified a publication dedicated to this particular point in a physics journal (Evano et al. 2019). The present paper complements and adds to this publication, putting emphasis on the asteroseismic applications.

The paper is organized as follows : we first introduce the formalism and numerical methods, then present the properties of high frequency chaotic modes (Section 3), and develop the semiclassical theory which explains the features observed (Section 4). The Appendix presents detailed derivations needed for Section 4.

## 2. Formalism and numerical methods

In this section, we first introduce the equations and tools used to study propagating pressure waves in stars. Then we present the range of numerically computed high-frequency pressure modes and finally the method used to classify the modes and obtain a set of high-frequency chaotic modes for different rotation rates.

### 2.1. Pressure waves and their ray limit in rapidly rotating stars

We consider adiabatic pressure perturbations in a self-gravitating gas. We are focusing on p-modes in the high-frequency regime, and as is usual in this case we apply the Cowling approximation, neglecting the perturbations of the gravitational potential. This approximation is known to be valid for high-frequency perturbations in non rotating stars (Aerts et al. 2010). We also neglect the Coriolis force since its influence on the pulsation frequencies is known to be weak in the high-frequency regime, see Reese

et al. (2006). Finally, we can discard the gravity waves since the Brunt-Väisälä frequency is very small compared to the high p-mode frequencies. With all these approximations taken into account, the adiabatic pressure perturbations obey a Helmholtz-like equation derived in Lignières & Georgeot (2009) :

$$\Delta\Psi + \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2}\Psi = 0, \quad (1)$$

where  $\Psi = \hat{P}/f$ , with  $\hat{P}$  the complex amplitude associated with the time-harmonic pressure perturbation  $P = \text{Re}[\hat{P} \exp(-i\omega t)]$ ,  $f$  a function of the background model,  $\omega_c$  is a cut-off frequency of the model and  $c_s$  is the inhomogeneous sound velocity.

The short-wavelength approximation of Eq. 1 leads to the eikonal equation

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 + \omega_c^2. \quad (2)$$

This equation can be put in the form of a Hamiltonian system describing the propagation of acoustic rays (Ott 1993), by setting  $H = \omega = (c_s^2 k^2 + \omega_c^2)^{1/2}$ . The motion takes place in a meridional plane rotating with the ray at an angular velocity  $d\phi/dt = \tilde{L}_z/d^2$ , where  $\tilde{L}_z = r \sin\theta k_\phi/\omega$  is a constant of motion and  $d$  is the distance to the axis of rotation. To compute the ray paths we use an alternative Hamiltonian form derived in Lignières & Georgeot (2009) as :

$$H' = \frac{\tilde{k}_p^2}{2} + W, \quad (3)$$

$$W = -\frac{1}{2c_s^2} \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) + \frac{\tilde{L}_z^2}{2d^2}, \quad (4)$$

where  $\tilde{k}_p$  is the frequency-scaled wave vector  $\tilde{k} = k/\omega$  projected onto the meridional plane and  $W$  is the potential. The corresponding dynamical system is

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \tilde{\mathbf{k}}_p, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{k}}_p}{dt} = -\nabla W, \quad (5)$$

where  $dt = c_s ds / \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{1/2}$ , is a time-like variable,  $s$  being the curvilinear coordinate along the ray. This system is then integrated using a fifth order Runge-Kutta method. To simplify the notation, we now refer to  $\tilde{k}_p$  as simply  $\tilde{k}$ .

The motion of acoustic rays inside the meridional plane corresponds to a dynamical system with  $N_d = 2$  degrees of freedom. Because the wave frequency is a conserved quantity, the phase space trajectories evolve on a  $2N_d - 1$  surface. To reveal the properties of a dynamical system, it is customary to define a surface of lower dimension, called a Poincaré Surface of section (PSS), by fixing an additional parameter (Gutzwiller 1990; Ott 1993). There are multiple possible choices of PSS, the recommendations for a faithful representation are given in (Ott 1993). We have chosen a surface at constant radial distance  $z$  from the star surface  $r_s(\theta)$  :  $r_p(\theta) = r_s(\theta) - z$ , where  $r_p(\theta)$  is the radial coordinate of the PSS. An example of such a PSS is shown in Fig. 1. Each dot on this figure corresponds to the crossing of the PSS with a ray approaching the surface. Chaotic zones correspond to trajectories filling densely an area, whereas regular trajectories

are constrained to remain on a closed curve. The chaotic dynamics implies ergodicity in a certain phase space zone, and exponential separation of nearby trajectories, whose rate is measured by the Lyapunov exponents (Ott 1993).

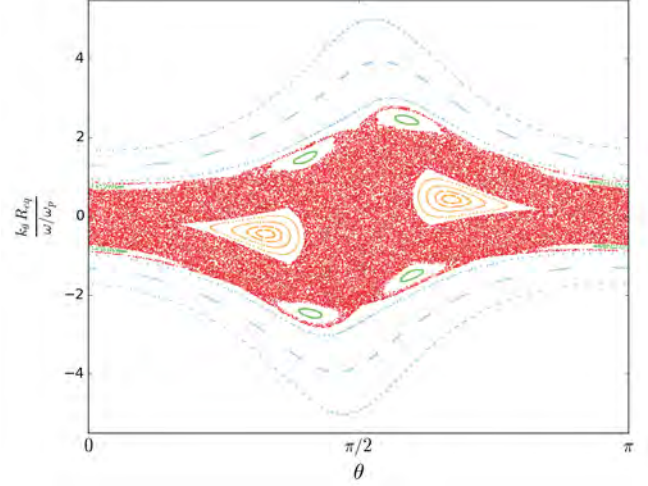
The system undergoes a KAM-like transition (named from a famous theorem from Kolmogorov, Arnold and Moser describing the typical transition to chaos, see for example Ott (1993)), with the rotation rate  $\Omega$  playing the role of the perturbation. It is known that in this case the phase space contains chaotic zones, island orbits around stable periodic orbits and KAM tori reminiscent of the  $\Omega = 0$  system. This is represented in Fig. 1. We did not draw the small island structures in the domain where  $|k_\theta/\omega|$  is high. Ergodic trajectories appear as soon as the spherical symmetry is broken. At low rotation rates the chaotic zone is very small. However, it expands considerably as the star is flattened by rotation. The rotation rate of the model of star will be given in terms of the Keplerian break-up rotation rate  $\Omega_k = (GM/R_{eq}^3)^{1/2}$ , where  $G$  is Newton's constant,  $M$  is the mass of the star and  $R_{eq}$  the equatorial radius. Near  $\Omega/\Omega_k \simeq 0.32$  the chaotic zone is comparable in size to the main stable island and continues to grow afterward (see Fig. 2). The ratio  $\mathcal{V}_I/\mathcal{V}_{II}$ , where  $\mathcal{V}_I$  is the volume occupied by the main stable island and  $\mathcal{V}_{II}$  is the volume of the main chaotic zone, is a relevant quantity as it indicates (as we shall see) the proportion of island modes to chaotic modes. Measuring the areas  $\mathcal{A}_I$  and  $\mathcal{A}_{II}$  on the PSS, corresponding respectively to the main island and chaotic zones, we found out that the function  $\mathcal{A}_I(\Omega)/\mathcal{A}_{II}(\Omega)$  is not monotonic. In fact, the ratio of the 2-period island over the chaotic zone shrinks beyond  $\Omega/\Omega_k = 0.658$ , reaches a minimum around  $\Omega/\Omega_k = 0.682$ , then increases again from this point onward. This non-monotonic behavior was not detected in Lignières & Georgeot (2009) as rotation rates around  $\Omega/\Omega_k = 0.682$  were not considered.

The non axisymmetric ray dynamics  $\tilde{L}_z \neq 0$ , shown in Fig. 3, is qualitatively similar, but the expansion of the chaotic zone is retarded. Moreover, the domain of propagation is reduced. Indeed, the ray has azimuthal velocity and, as a result, cannot come arbitrarily close to the rotation axis. In the meridional plane, this phenomenon translates into a condition on the colatitude (Lignières & Georgeot 2009) –  $\arcsin(|\tilde{L}_z|/\tilde{L}) < \theta < \arcsin(|\tilde{L}_z|/\tilde{L})$ ,  $\tilde{L}$  being the frequency-scaled angular momentum norm.

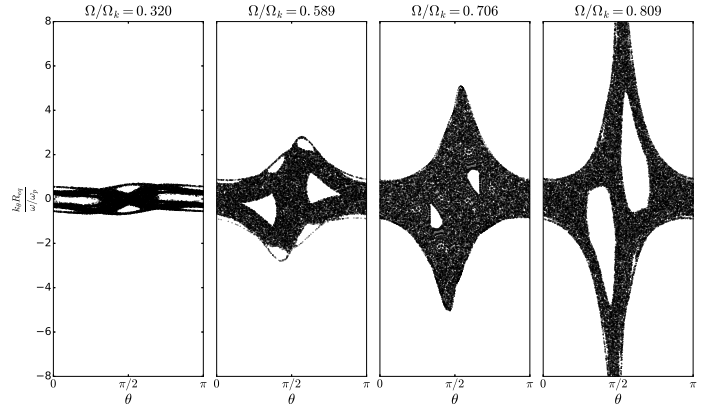
The semiclassical theory of such a mixed phase space with both regular and chaotic zones, due to Berry and Robnik (Berry & Robnik 1984), indicates that regular and chaotic modes can be associated to the different phase space areas and form independent subspectra. This prediction was verified in Lignières & Georgeot (2009) by computing high-frequency modes and classifying them according to the phase space structure.

## 2.2. The set of numerically computed high-frequency p-modes

As for the ray dynamics, the star is modeled by a uniformly rotating, self-gravitating monoatomic perfect gaz of adiabatic exponent  $\Gamma = 5/3$ . We impose that the pressure and density satisfy a polytropic relation  $P \propto \rho^{1+1/\mu}$ , with  $\mu = 3$  (Hansen et al. 2004). As we are interested in high-frequency, and thus small-wavelength, p-modes, attention has to be paid to numerical resolution. The stellar model is calculated using spectral methods with Chebyshev polynomials in a pseudo radial direction and Legendre polynomial in latitude, corresponding to  $N_j = 96, 128, 140$  radial points and  $N_l \leq 185$  latitudinal points.



**Fig. 1.** PSS at rotation rate  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  with  $\tilde{L}_z = 0$ , where  $\theta$  is the colatitude and  $k_\theta$  the projection of the wave vector on the line tangent to the  $r_p(\theta) = r_s(\theta) - z$  curve. Two stable islands are embedded in a chaotic region, which is itself surrounded by whispering gallery rays. The different types of rays are color coded, blue : whispering gallery, green : 6-period island, yellow : 2-period island and red : ergodic.



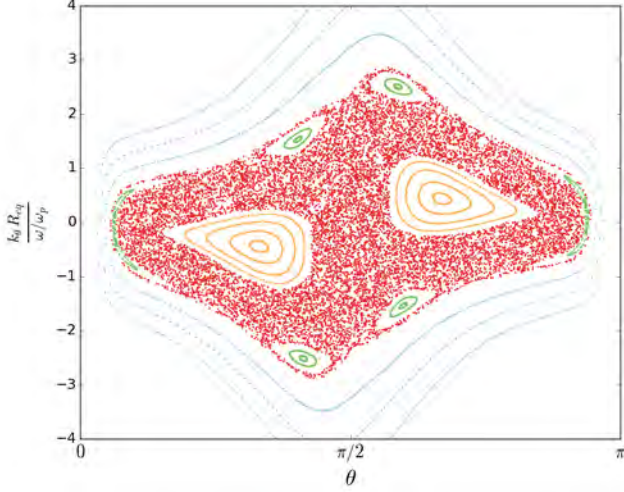
**Fig. 2.** Chaotic zone of the PSS at increasing values of the rotation rate. The chaotic zone grows monotonically, which is not the case for the main island zone.

To compute its oscillation modes, we use the code TOP described in (Reese et al. 2006, 2009). Modes are computed using  $N_j$  Chebyshev polynomials  $T_j$  and  $N_l$  spherical harmonics  $Y_l^m$ , through the decomposition :

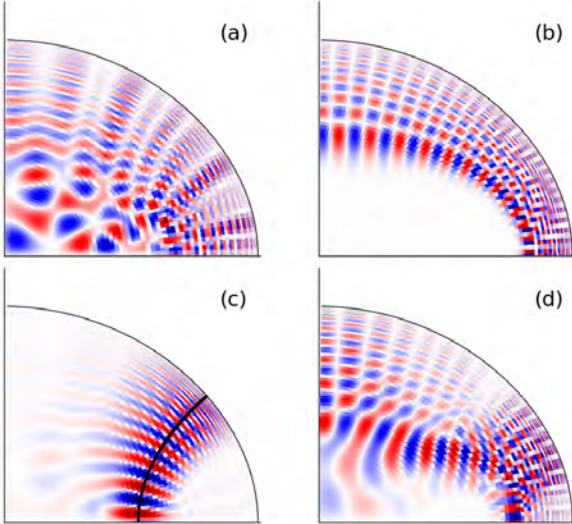
$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{N_l} \left( \sum_{j=0}^{N_j} a_j^{l,m} T_j(2r-1) \right), Y_l^m(\theta, \phi), \quad (6)$$

where the degrees  $l$  are either odd or even integers (Reese et al. 2006). The needed resolution is determined by the smallest scale on which the mode amplitude varies. Physically, it is directly related to the highest values taken by the components of the wave vector  $k_\theta$  and  $k_r$ . Using the PSS of a given stellar model, we can determine the upper limit of the wave vector components  $\tilde{k}_\theta^{max}$  or  $\tilde{k}_r^{max}$  associated with a particular phase space structure. The chaotic zone growth seen in Fig. 2 indicates that the required angular resolution to compute chaotic modes increases rapidly with rotation. Therefore, computing high-frequency chaotic modes is





**Fig. 3.** PSS at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  with  $\tilde{L}_z = 0.16/\omega_p$ , where  $\theta$  is the colatitude and  $k_\theta$  the projection of the wave vector on the line tangent to the  $r_p(\theta) = r_s(\theta) - z$  curve. The phase space structures are similar to those presented in Fig. 1



**Fig. 4.** Four odd axisymmetric modes at rotation  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  : (a) chaotic mode, (b) whispering gallery mode, (c) 2-period island mode ( $\ell = 0$ ), with a black line indicating the central periodic orbit, and (d) 6-period island mode. The figure shows the scaled pressure amplitude  $\Psi = P\sqrt{d/\rho_0}$ , with  $d$  the distance to the rotation axis and  $\rho_0$  the equilibrium density.

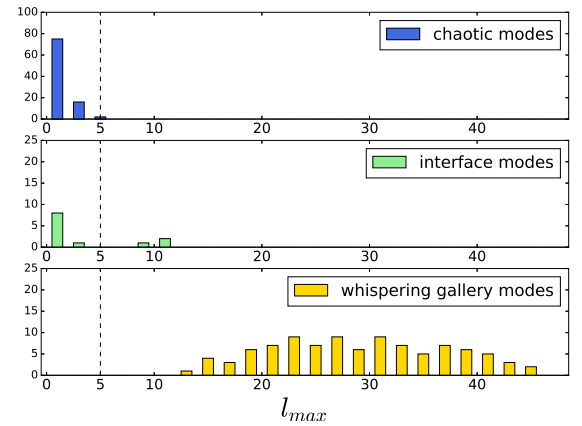
more and more demanding as the model approaches  $\Omega_k$ . The central chaotic zone is bounded by whispering gallery rays in the full phase space. Thus we know that, in a given frequency domain, the required resolution to compute all chaotic modes is attained if we are able to produce a few well resolved whispering gallery modes. With these constraints, we produced spectra at six different rotations :  $\Omega/\Omega_k = 0.481, 0.545, 0.589, 0.658, 0.706$  and  $0.809$  with frequencies ranging from  $\sim 23 \omega_p$  to  $\sim 47 \omega_p$ , with  $\omega_p = (GM/R_p^3)^{1/2}$ , where  $R_p$  is the polar radius. A typical example of each kind of mode is shown in Fig. 4 : a whispering gallery mode corresponding to a KAM torus, a 6-period island mode corresponding to the 6-period island chain, a 2-period island mode corresponding to the 2-period island chain and a chaotic

mode corresponding to the chaotic zone. To construct a large set of chaotic modes requires to identify them among all the computed modes.

### 2.3. Mode identification

In this section we explain our methodology to isolate chaotic modes. To achieve this goal we proceed by elimination. The basic idea is to identify all regular modes and remove them from the dataset until only chaotic modes remain.

To begin with, we identify 2-period island modes using the fact that their frequency spectrum is regular and of the form  $\omega_{n,\ell,m} = n\delta_n(m) + \ell\delta_\ell(m) + \alpha$ , where  $n$  (resp.  $\ell$ ) is the number of nodes along (resp. transverse to) the central orbit  $\gamma$  of the island, shown in Fig. 4, and  $\alpha$  is a constant (Pasek et al. 2012). Thus the frequency spectrum is completely determined by the regular spacings  $\delta_n$  and  $\delta_\ell$ , with the half large separation  $\delta_n(m) = 2\pi/\oint_\gamma (ds/\tilde{c}_s)$ <sup>1</sup>. However, the regularity of the 2-period island modes may be altered by two aspects : first the deviations from asymptotic theory, expected at finite frequency, and secondly the occurrence of avoided crossings between an island mode and a chaotic mode. In practice, the island mode spacing is rigid enough to identify them. In the case of an avoided crossing, we choose arbitrarily one of the two modes as being an island mode and discard the other one. The impact of this choice on the spectrum is weak since the frequencies of two modes in the process of an avoided crossing are very close. In the same way, 6-period island modes are identified on the basis of their regularity (Ligni  res & Georgeot 2009).



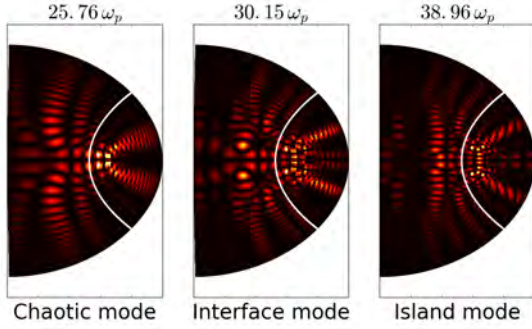
**Fig. 5.** Histograms showing the distribution of three types of odd modes as a function of their dominant degree  $l_{max}$ , at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  in the frequency domain  $25.6 \omega_p$  to  $33.5 \omega_p$ . The existence of a gap between the highest value of  $l_{max}$  for chaotic modes, marked by a dashed line, and the lowest value of  $l_{max}$  for whispering gallery modes is used to automatically separate these two types of modes.

Then we remove the whispering gallery modes automatically. The PSS shows that the  $\tilde{k}_\theta^{max}$  of any whispering gallery ray is higher than the  $\tilde{k}_\theta^{max}$  of the chaotic zone. This means that whispering gallery modes vary on smaller latitudinal scales than chaotic modes, meaning that they have more angular nodes.

<sup>1</sup> The large separation is expressed as  $\Delta_i = 2\pi/\oint_\gamma (ds/\tilde{c}_s)$ , where the integral is calculated along the path  $\gamma$  between two points on the surface, which is half the full period of the orbit.

Therefore, we expect their spherical harmonic expansion, Eq. 6, to be dominated by the high degree components.

For a given  $m$ , we sum over  $j$  to get the averaged coefficients  $\bar{a}^l \equiv \frac{1}{N_j} \sum_{j=0}^{N_j} |a_j^l|$ . Thus the dominant degree  $l_{max}$  corresponds to the value of  $l$  where  $\bar{a}^l$  is the greatest. In the bottom panel of Fig. 5, the distribution of whispering gallery modes with respect to  $l_{max}$  is shown for a given rotation. There is indeed no whispering gallery mode below  $l_{max} = 10$ . The top panel displays the same distribution for chaotic modes, showing that they are instead dominated by their low degree components. In fact, there is a critical value  $l_c$  of  $l_{max}$  such that  $l_{max} \leq l_c$  for every chaotic mode and  $l_{max} > l_c$  for any whispering gallery mode. Therefore, it is sufficient to find  $l_c$  to remove all whispering gallery modes from the dataset.



**Fig. 6.** Three modes at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  belonging to series 1. From left to right, we see a chaotic mode, an interface mode and an island mode with  $\ell = 4$ . The thick white line is the main island central orbit. The modes intensity  $|\Psi|^2$  is represented, where  $\Psi$  is the scaled pressure amplitude as in Fig. 4.

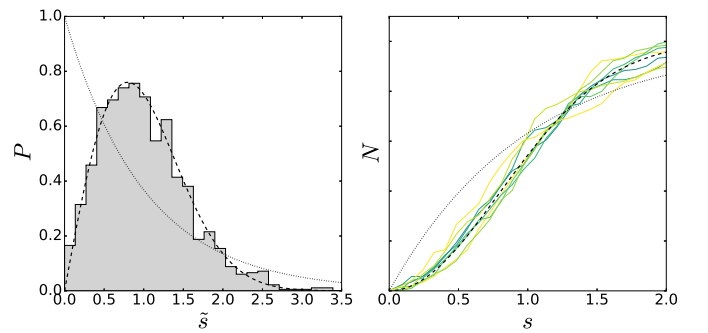
At finite frequency, here  $\omega \leq 47\omega_p$ , the Berry-Robnik regime is not perfectly satisfied (Vidmar et al. 2007). Therefore we expect that some modes cannot be classified in a unique category. We find such modes and call them interface modes. There are two types of interface modes : whispering gallery-like and island-like. An example of island-like interface mode is presented in the central panel of Fig. 6. By nature, interface modes have properties of both chaotic modes and either island or whispering gallery modes. To distinguish between "well defined" modes and interface modes, we can look either at their amplitude pattern or at their Husimi distribution, which is a projection of the eigenmode in phase space (Chang & Shi 1986; Lignières & Georgeot 2009). The distinction between chaotic modes and interface modes is not clear-cut, whether we use the amplitude of the modes or the Husimi distributions as a guide. Any time we encountered an ambivalent mode, we applied the following rules to categorize it. If the amplitude is high near an internal caustic, then the mode is a whispering gallery-like interface mode. The difference between chaotic, island-like and island modes is illustrated in Fig 6. We consider that a mode is not chaotic if its amplitude is concentrated around the central orbit of the main island. In parallel, we examine the placement of the mode in the spectrum, and look for regularities. Even at the highest frequencies considered,  $\ell = 4$  island modes cannot be distinguished from interface modes without ambiguity from the amplitudes.

Our dataset of chaotic frequencies is described in table 1. All axisymmetric modes were identified using the methodology described above. For non axisymmetric modes the last step, i. e.

**Table 1.** Characteristics of chaotic frequency spectra. We show the symmetry classes, which are denoted by  $m^\pm$  (where  $m$  is the azimuthal quantum number, + is even parity and - is odd parity), the rotation rate, the number of levels and the frequency domain.

symmetry class	Rotation ( $\Omega/\Omega_k$ )	levels	frequencies ( $\omega/\omega_p$ )
$0^-$	0.481	206	28.35 - 46.89
$0^-$	0.545	223	28.15 - 44.09
$0^-$	0.589	217	26.02 - 40.29
$0^-$	0.658	207	36.37 - 44.89
$0^-$	0.706	283	23.57 - 36.22
$0^-$	0.809	170	24.02 - 30.01
$0^+$	0.545	105	38.01 - 44.06
$0^+$	0.589	96	30.52 - 36.60
$0^+$	0.658	120	36.40 - 41.25
$1^-$	0.589	125	30.51 - 38.48
$4^-$	0.589	93	30.53 - 38.51

the identification of interface modes through the amplitude of the mode or the Husimi distribution, was not performed. The modes listed in table 1 are separated into symmetry classes associated with the quantum number  $m$  and the parity with respect to the equator ( $m^-$  odd,  $m^+$  even). A distinctive property of chaotic mode spectra is to have a universal statistical behavior (Gutzwiller 1990). In particular, their nearest neighbor distribution  $P(\tilde{s})$ , with  $\tilde{s}_n = (\omega_{n+1} - \omega_n)/\langle\omega_{n+1} - \omega_n\rangle$ , where  $\langle\omega_{n+1} - \omega_n\rangle$  corresponds to the mean frequency spacing, is expected to follow the Wigner surmise of Random Matrix Theory  $P(\tilde{s}) = \frac{\pi\tilde{s}}{2} e^{-\pi\tilde{s}^2/4}$  (Gutzwiller 1990). This is checked in Fig. 7 and it confirms that our method for selecting chaotic modes works properly. We aggregated the eight independent spectra to obtain better statistics (left panel). Using this standard aggregating procedure enables us to obtain much better statistics than in previous studies (Lignières & Georgeot 2008). The integrated distribution  $N(s) = \int_0^s P(\tilde{s}) d\tilde{s}$ , displayed in the right panel, shows that the agreement is good for individual spectra as well. We did not take into account the specific case of  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  which corresponds to an anomalous statistics, intermediate between the Wigner and Poisson distributions, with no level repulsion (Evano et al. 2019). Such a distribution is characteristic of a superposition of independent spectra, and will be explained later (see Section 4.2).



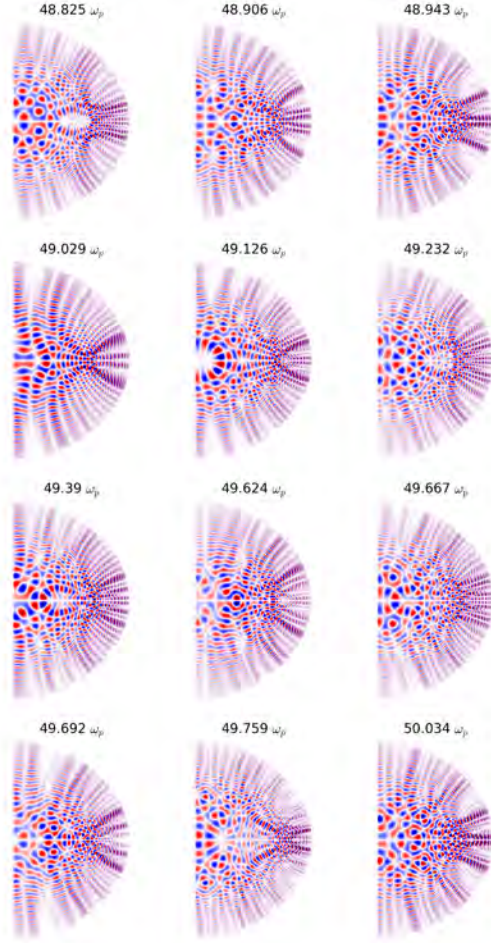
**Fig. 7.** Left : nearest neighbors spacing distribution  $P(\tilde{s})$ , with 1344 frequency levels obtained from eight independent spectra :  $\Omega/\Omega_k = 0.481$  (206 odd levels),  $\Omega/\Omega_k = 0.545$  (223 odd levels, 105 even levels),  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  (217 odd levels, 96 even levels),  $\Omega/\Omega_k = 0.658$  (207 odd levels, 120 even levels) and  $\Omega/\Omega_k = 0.809$  (170 odd levels). Right : integrated distribution  $N(s)$  for all eight independent spectra. In both panels the dashed line is the Wigner surmise and the dotted line is the prediction for Poissonian spectra.



### 3. Properties of high-frequency chaotic modes

#### 3.1. Spatial distribution of the mode amplitudes

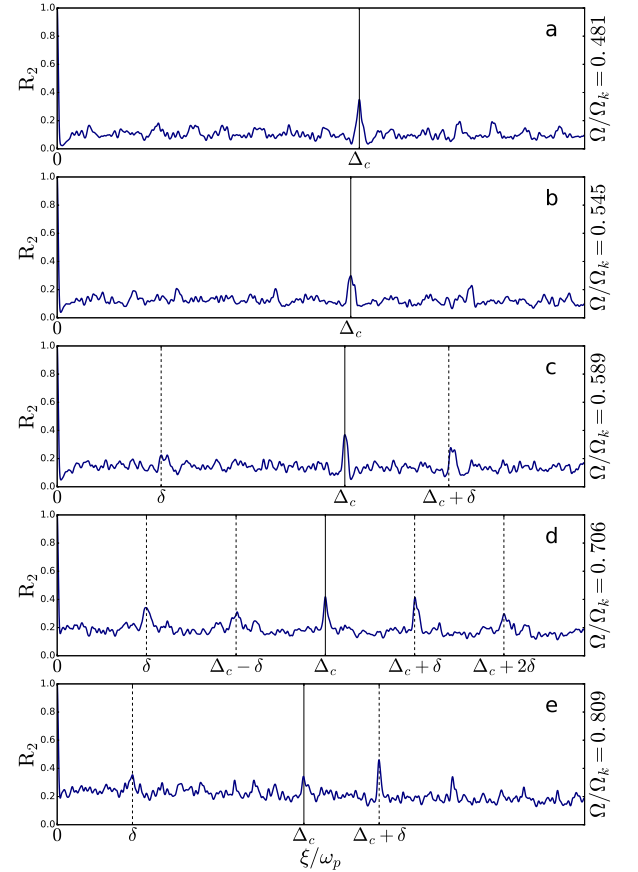
We start with a qualitative description of the main spatial features of chaotic modes. Representative examples of their amplitude distribution in a meridional plane are displayed in Fig. 8. A first observation is that their nodal pattern is complex in the sense that, contrary to regular modes, there is no simple way to count the number of nodes. Nevertheless we also notice that while the inner part of the chaotic modes looks random, the outer part is much more structured. Indeed it is possible, near the surface, to count radial and angular nodes. The nodes appear regularly spaced in the radial direction but are unevenly distributed in the angular direction. The amplitude distribution of chaotic modes is therefore mainly characterized by its irregular nature, but with radial regularities near the surface. In the next subsection, we will show that the chaotic spectra present some regularities as well. Another notable property of the chaotic modes presented in Fig. 8 is that they spread out in the entire stellar interior. This distinguishes chaotic modes from regular modes that are confined in a narrow part of the star : whispering gallery modes stay close to the star surface and island modes are trapped in the vicinity of a central periodic orbit (see Fig. 4). Chaotic modes are thus the only class of p-modes able to probe the star center at high frequency.



**Fig. 8.** Scaled pressure amplitude  $\Psi$  shown for twelve odd axisymmetric chaotic modes at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  with quantum number  $m = 0$ .

#### 3.2. Regularities in the spectra

We computed the autocorrelation  $R_2(\xi) = \int d(\omega - 1/2\xi)d(\omega + 1/2\xi)d\omega$  of a variety of chaotic spectra, where the density  $d(\omega)$  was obtained by convoluting the spectra with a Gaussian function of small standard deviation compared to the mean frequency spacing and of height unity. The results are shown in Fig. 9 at five different rotations for the case of axisymmetric modes with odd equatorial parity. The figure clearly shows peaks emerging from the noise level, which are not predicted by Random Matrix Theory nor seen in generic chaotic spectra. The peak that appears at every rotation, and which is usually the most visible, is referred to as the "main peak". Its position, denoted  $\Delta_c$ , slightly decreases with increasing rotation. Moreover, additional peaks of significant amplitude appear in the autocorrelations, their relative amplitude being large especially at  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ . In the following we characterize the spectrum structure behind these peaks (the next two sub-sections) and then extend our analysis to the non-axisymmetric modes.



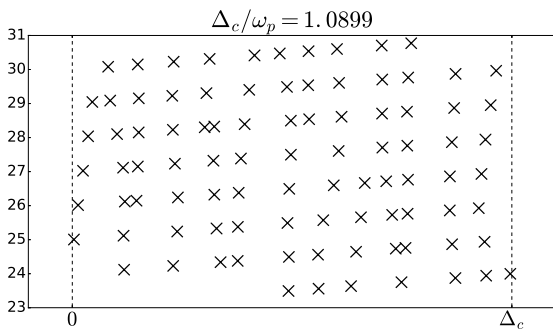
**Fig. 9.** Autocorrelations  $R_2(\xi)$ , where  $\xi$  is a displacement in frequency, of chaotic spectra with odd parity : a) 206 levels from  $28.35 \omega_p$  to  $46.89 \omega_p$ , b) 223 levels from  $28.15 \omega_p$  to  $44.09 \omega_p$ , c) 217 levels from  $26.02 \omega_p$  to  $40.29 \omega_p$ , d) 283 levels from  $23.57 \omega_p$  to  $36.22 \omega_p$  and e) 170 levels from  $24.02 \omega_p$  to  $30.01 \omega_p$ . The autocorrelations have been normalized such that their value at the origin is unity. The main peak's position is labeled  $\Delta_c$  and marked with a solid line. Secondary peaks are marked in panels c, d and e with a dashed line.

### 3.2.1. Main peak

The systematic presence of the main peak in the autocorrelations is a hint that the spectra are structured by the characteristic frequency spacing  $\Delta_c$ . To verify this idea, we make use of so-called échelle diagrams. On such diagrams, two modes distant in frequency of  $\Delta$  will be represented by two points sharing the same abscissa and separated by one unit on the y axis. We consider a portion of spectrum at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ , and analyze its structure in a detailed way. In Fig. 10, the frequencies of all odd parity axisymmetric chaotic modes between  $25.07\omega_p$  and  $33.78\omega_p$  are represented on an échelle diagram, using a folding value equal to the main peak  $\Delta_c = 1.0899\omega_p$  of the autocorrelation. The frequencies are grouped in approximate vertical lines, some of which are very well aligned, whereas others seem to form diagonal or wavy tracks (Changing slightly the folding value breaks the best alignments but other tracks line up instead). The échelle diagram shows that the chaotic spectrum can be split into series of modes separated in frequency by approximately  $\Delta_c$ .

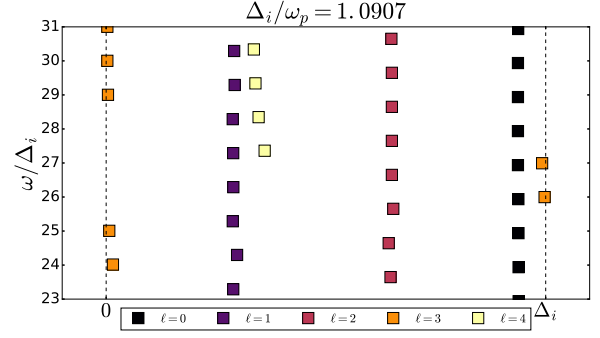
This property is well-known for low-degree modes in non-rotating stars as well as island modes in rotating ones (see Fig. 11). The frequency spacing between two consecutive modes is the so-called large separation and their amplitude distributions only differs by the number of nodes along a particular direction (radial for modes in a non rotating star and along the central periodic orbit for island modes). In such regular spectra, this structuring of the frequencies is directly related to the classical dynamics through so-called Einstein-Brillouin-Keller theory (Pasek et al. 2011, 2012). Its appearance in a chaotic spectrum is more mysterious, and will be explained in Section 4.

In the autocorrelations of even chaotic mode spectra, both the main peak and secondary peaks usually have a smaller amplitude. Nonetheless, even mode frequencies produce ridges in the échelle diagram, just like odd mode frequencies. In Lignières et al. (2006), it was pointed out that even modes are more strongly impacted by avoided crossings. This fact could explain why even modes are less regular than odd modes.



**Fig. 10.** Échelle diagram of chaotic modes at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  in the range  $25.60\omega_p$  to  $33.54\omega_p$ , with odd parity.

Comparing the amplitude patterns of the chaotic modes that belong to the same track on the échelle diagram, we find out that consecutive modes are often very similar. This is illustrated by two examples of consecutive modes in Fig 12. From a systematical search for couples of modes with a similar amplitude distribution that are separated in frequency by approximately



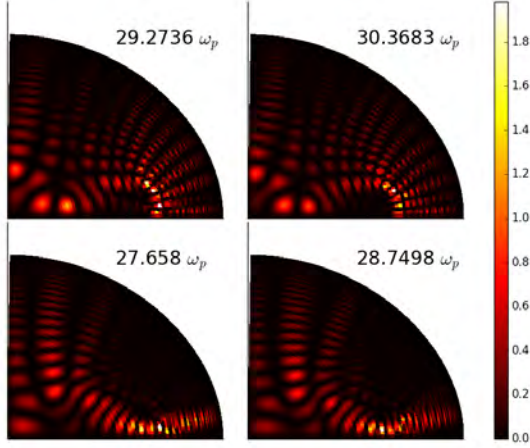
**Fig. 11.** Échelle diagram of island modes  $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$  at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ , with only odd modes. The lowest point of the  $\ell = 4$  track corresponds to an island-like interface mode.

$\Delta_c$ <sup>2</sup>, we were able to label the vertical series of chaotic mode échelle diagram, ending-up with the sixteen series shown in Fig. 13. The very few modes left without a label are modes undergoing an avoided crossing.

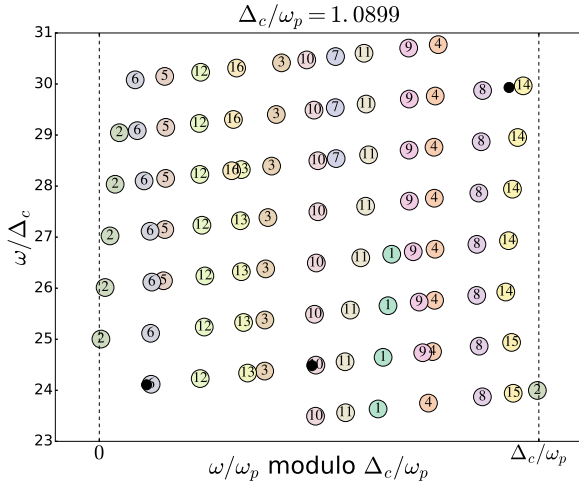
This analysis indicates that the spectrum organization in series of modes separated by a fixed frequency spacing and showing similarities in their spatial distribution is also relevant for chaotic modes. In this context,  $\Delta_c$  can be interpreted as a large separation for chaotic modes. Its value turns out to be close to the island mode large separation in the same frequency range  $\Delta_i = 1.0907\omega_p$ .

There are nevertheless some important differences with non-rotating and island modes. First the frequency spacing is much more regular for non-rotating or island modes than for chaotic modes. This is obvious from the comparison of the chaotic mode échelle diagram with the échelle diagram of the 2-period island modes shown in Fig. 11. The similarity of the amplitude distributions along a vertical series is also much stronger for island modes than for chaotic modes. In agreement with the asymptotic theory of island modes (Pasek et al. 2012), island modes of the same series have the same number of nodes, denoted  $\ell$ , in the direction perpendicular to the periodic orbit. By contrast, the comparison between two chaotic modes of the same series but separated by a few  $\Delta_c$  is not as clear, since the patterns slowly evolves from one mode to the next. Another important difference comes from the characteristics of the series. As expected from the theory and as observed in Fig. 11, island mode series should not stop toward high frequencies as modes with the same  $\ell$  and higher  $n$  remain aligned in the échelle diagram. This is not the case for chaotic modes as some series like series number 1, 2, and 13 on Fig. 13 come to an end in the frequency range considered. In parallel, some series starts above a given frequency, for example the series number 16 appearing above  $\omega = 27\Delta_c$ . Typically, interface modes appear at the start of a series as whispering gallery-like modes or at the end of a series as island-like modes. In our data, the end of a series of chaotic modes is also the start of a series of island modes of given  $\ell$ ; for instance, series 1 is followed by  $\ell = 4$  island modes and series 2 by  $\ell = 5$  island modes. This transition is visible by comparing Fig. 13, where series 1 ends just below  $27\Delta_c$ , and Fig. 11 where the  $\ell = 4$  island modes start just above  $27\Delta_c$ .

<sup>2</sup> the systematic search for consecutive modes was performed only for the chaotic spectrum at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  represented in the échelle diagram.



**Fig. 12.** Mode intensity  $|\Psi|^2$  at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ , where  $\Psi$  is the scaled pressure amplitude, showing the similarity between consecutive modes. Top : two consecutive modes that belong to series 8. Bottom : two consecutive modes that belong to series 3.



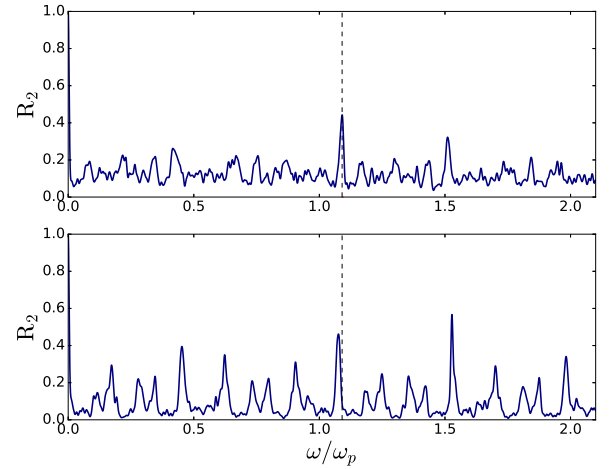
**Fig. 13.** Échelle diagram showing all chaotic frequencies in the range  $25.60\omega_p$  to  $33.54\omega_p$  modulo the large separation  $\Delta_c$ . Series of modes are labeled by numbers 1 to 16. Black dots correspond to modes that do not fit into a series.

### 3.2.2. Secondary peaks

In addition to the main peak discussed above, we see other peaks that we call secondary peaks. At  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ ,  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  and  $\Omega/\Omega_k = 0.809$ , one can clearly distinguish these peaks from the background noise. They are marked by a dashed line in Fig. 9. The peaks occur at  $\alpha\delta + \beta\Delta_c$ , where  $\delta$  is the position of the first secondary peak and  $\alpha$  and  $\beta$  are integers. For instance, the peaks of Fig. 9, panel c, occur at  $(\alpha = +1, \beta = 0)$  and  $(\alpha = +1, \beta = +1)$ . At  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ , secondary peaks are numerous and close in amplitude to the main peak. At this rotation, we have already noticed the nearest neighbors statistics is anomalous (Evano et al. 2019), intermediate between the Wigner and Poisson distributions with no level repulsion. This anomalous statistics is a sign that independent subspectra coexist at  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ . We will propose an explanation for these secondary peaks in Section 4.

### 3.3. Non-axisymmetric modes

Because the model is cylindrically symmetric, modes are quantized in the azimuthal direction, the quantum number being denoted  $m$ . In the ray dynamics, it corresponds to the quantization of the invariant associated with this symmetry, that is the projection  $L_z$  of the angular momentum on the axis of rotation. For a given rotation and frequency, increasing  $\tilde{L}_z = L_z/\omega$  has the effect of reducing the size of the chaotic zone. This can be seen by comparing the PSS of Fig. 1 with  $m = 0$  and the PSS of Fig. 3 with  $m = 4$ , both with  $\omega = 24.41\omega_p$ . From the mode numerical computations, we find for  $m = 1$  the main peak is still clearly visible in the autocorrelation, and almost exactly at the same position as for the axisymmetric case. However for  $m = 4$  the autocorrelation shows a forest of peaks, the main peak being slightly shifted toward low values (see Fig. 14).



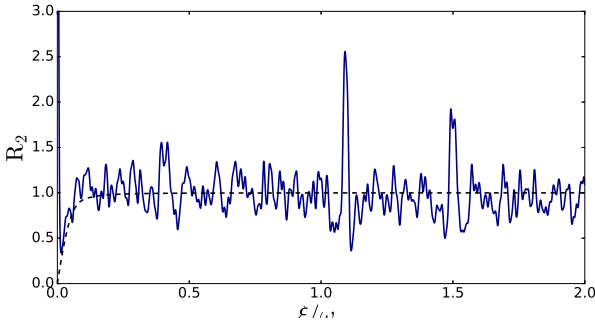
**Fig. 14.** Top panel : Autocorrelation at  $\Omega/\omega_k = 0.589$  for quantum number  $m = 1$ , in the frequency domain  $30.51\omega_p$  to  $38.48\omega_p$ . Bottom panel : Autocorrelation at  $\Omega/\omega_k = 0.589$  for quantum number  $m = 4$ , in the frequency domain  $30.53\omega_p$  to  $38.51\omega_p$ . In both cases, the dashed line is the position  $\Delta_c$  of the main peak for axisymmetric modes at the same rotation rate.

## 4. Semiclassical interpretation

In section 3, we gave a description of the most important properties of chaotic modes in our model of rotating stars. Our goal in the present section is to provide a theoretical understanding of these results based on asymptotic methods. The statistical properties of chaotic spectra are well described by Random Matrix Theory (Bohigas 1991; Mehta 2004), which studies the distribution of the eigenvalues of matrices filled with Gaussianly distributed random numbers. Real symmetric random matrices are of particular interest. Indeed, they form the Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE) that models the spectra of time-reversal symmetric systems. Comparing an autocorrelation of the stellar model with the GOE autocorrelation (see Fig. 15) makes it clear that the main peak and secondary peaks are not generic features of wave chaos. If Random Matrix Theory is efficient at modeling the generic properties of chaotic systems, it is not able to grasp specific behaviors that may arise in particular systems (see e.g., Bogomolny et al. (1992, 1997)). However, semiclassical methods based on the propagation of rays are well suited for this task.



Using the semiclassical periodic orbit theory, which relates the mode properties to the acoustic ray dynamics, we show in subsection 4.1 that the  $\Delta_c$  regularity is caused by the strong decrease of the sound speed at the surface, and present a theory which predicts the occurrence of the peak and its characteristics from the ray dynamics. We then explain the presence of secondary peaks by the transport properties of the phase space in subsection 4.2. In subsection 4.3 we show, using a simplified model, how the behavior of acoustic rays near the surface may induce structure in the nodal pattern. In subsection 4.4 we discuss how the families of chaotic modes evolve when the frequency domain changes. At last in subsection 4.5, we show that the proximity of  $\Delta_c$  and  $\Delta_i$  is not accidental, and we propose a way to differentiate chaotic modes and island modes using the symmetries of the system.



**Fig. 15.** Comparison of the "stellar" autocorrelation  $R_2(\xi)$  at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ , represented in solid line, with the GOE autocorrelation represented by a dashed line. To compare the "stellar" and GOE autocorrelations, two changes have been made. First, the autocorrelation of our model has been re-scaled so that the value of the plateau, i.e. the line around which there are fluctuations, is approximately unity. The value of the plateau otherwise depends on the mean density  $\bar{d}(\omega) = dN/d\omega$  and the Gaussian smoothing of the spectrum. Secondly, the GOE distribution has been rescaled, in the direction of the x axis, by the mean level spacing of the  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  spectrum in the frequency domain considered.

#### 4.1. Main autocorrelation peak

##### 4.1.1. Periodic orbit theory

Before diving into the subject of periodic orbit theory, let us introduce a few quantities that will be later used to characterize the statistical properties of the spectra. The staircase function  $N(\omega)$  counts the number of modes below a given frequency  $\omega$ . From the staircase function one can define the spectral density  $d(\omega) = dN/d\omega$ . Both the staircase function and the spectral density are often written as the sum of two contributions called the smooth part  $\bar{N}(\omega)$  (or  $\bar{d}(\omega)$ ) and the fluctuating (or oscillating) part  $N^{osc}(\omega)$  (or  $d^{osc}(\omega)$ ), where the smooth part is obtained by locally averaging the function in the neighborhood of a target frequency.

Periodic orbit theory is an asymptotic semiclassical theory developed in the limit of high frequency or short wavelength. It is based on the trace formula (Gutzwiller 1990), which relates the spectral density to a sum over the periodic trajectories of the Hamiltonian system. Though it was originally derived in the framework of quantum mechanics, the trace formula can be adapted to any wave system with a ray approximation. Indeed

trace formulas have been built and tested, for instance in optics using microwave cavities (Kudrolli et al. 1994) or for plate vibrations (Bogomolny & Hugues 1998). In the same spirit, we re-derive the trace formula for the system considered here in Appendix A. Using  $j$  as a label for the periodic orbits  $\gamma_j$ , the formula reads :

$$d(\omega) - \bar{d}(\omega) = \text{Re} \sum_j A_j e^{iS_j(\omega)}, \quad (7)$$

where  $S_j = \omega \oint_{\gamma_j} ds/\bar{c}_s$  is the action and  $\oint_{\gamma_j} ds/\bar{c}_s = T_j$  is the acoustic travel time of  $\gamma_j$ . The amplitude term is expressed as

$$A_j = \frac{1}{\pi} \frac{T_j}{|\det(M_j - I)|^{1/2}}, \quad (8)$$

where  $I$  denotes the identity matrix and  $M_j$  is the monodromy matrix which describes the linearized motion around the periodic orbit and whose eigenvalues give the stability of the orbit. The periodic orbits are either so-called primitive orbits or repetitions of them. In many systems, the density  $\rho(T)$  of orbits with a time period  $T$  grows exponentially as

$$\rho(T) \approx (1/T) e^{\lambda T}, \quad (9)$$

where  $\lambda$  is the average lyapunov exponent of the system, which describes the rate at which nearby trajectories diverge. Long orbits are less stable and their amplitude drops down as

$$A(T) \approx \frac{1}{\pi} T e^{-(1/2)\lambda T}. \quad (10)$$

The exponential growth of the number of long orbits makes it numerically difficult to attain good precision on the spectral density using the trace formula. Moreover in many systems, including the stellar model studied here, there is no automatic procedure to find the periodic orbits. To circumvent these issues, Berry showed (Berry 1985) that some statistical quantities such as the variance, or more importantly the autocorrelation of the spectrum, can be approximated using the trace formula in systems where individual periodic orbits are not known, provided one knows their distribution.

The autocorrelation  $R_2(\xi) = \langle d(\omega - 1/2\xi) d(\omega + 1/2\xi) \rangle$ , with the average  $\langle f \rangle = \int f d\omega$ , can be re-written as  $R_2(\xi) = \langle d^{osc}(\omega - 1/2\xi) d^{osc}(\omega + 1/2\xi) \rangle + \phi(\xi)$ , where  $\phi(\xi)$  is a smooth function. The theory aims at deriving an approximate expression of the form factor :

$$K(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\xi T) C(\xi), \quad (11)$$

which is the Fourier transform of the autocorrelation

$$C(\xi) = \langle d^{osc}(\omega - 1/2\xi) d^{osc}(\omega + 1/2\xi) \rangle, \quad (12)$$

$$= \left\langle \left( \text{Re} \sum_i A_i e^{iS_i(\omega-1/2\xi)} \right) \left( \text{Re} \sum_j A_j e^{iS_j(\omega+1/2\xi)} \right) \right\rangle. \quad (13)$$

Getting rid of the real parts through the fact that with  $x = \text{Re}(\tilde{x}) = A_i \cos(\xi T_i + S_i)$  and  $y = \text{Re}(\tilde{y}) = A_j \cos(\xi T_j + S_j)$  then  $\langle xy \rangle = 1/2 \langle \tilde{x} \tilde{y}^* \rangle$ , gives

$$C(\xi) = \frac{1}{2} \left\langle \left( \sum_i A_i e^{iS_i(\omega-1/2\xi)} \right) \left( \sum_j A_j e^{iS_j(\omega+1/2\xi)} \right)^* \right\rangle. \quad (14)$$

Inserting this expression in Eq. 11 and expanding the action as  $S_j(\omega \pm 1/2\xi) \approx S_j(\omega) \pm 1/2\xi (\partial S_j / \partial \omega) = S_j(\omega) \pm 1/2\xi T_j(\omega)$ , where  $T_j$  is the acoustic travel time introduced before, leads to a new expression of the form factor :

$$\begin{aligned} K(T) &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_i \sum_j A_i A_j^* e^{i(S_i - S_j)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{i\xi(T - \frac{1}{2}(T_i + T_j))} \right\rangle, \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_i \sum_j A_i A_j^* e^{i(S_i - S_j)} \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} \delta\left(T - \frac{1}{2}(T_i + T_j)\right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Under the frequency average  $\langle \cdot \rangle$ , the contribution of the off-diagonal terms  $i \neq j$  in the double sum can be neglected. This diagonal approximation is valid for "short times" below the Ehrenfest time  $T_E \approx (1/\lambda) \ln(\omega)$  (Bogomolny et al. 1997). Beyond  $T_E$ , there are pairs of orbits with very close actions  $S_i \approx S_j$  and higher order terms need to be computed (Bogomolny & Keating 1996; Sieber & Richter 2001). In the regime where the diagonal approximation is valid, the expression of the form factor is reduced to

$$K(T) \approx \sum_j A_j^2 \delta(T - T_j). \quad (16)$$

In this expression  $K(T)$ , as a Fourier transform of a correlation function in frequency, is a function of time  $T$ . Eq. 16 means that  $K(T)$  is related to the distribution of travel times of all the periodic orbits labeled by  $j$  (and not of their lengths). This will be crucial in the subsequent analysis. For long orbits Eq. 16 can be written as

$$K(T) \approx A^2(T) \rho(T), \quad (17)$$

where  $\rho(T) dT$  is the the number of periodic orbit with a time period between  $T$  and  $T + dT$ . A prescription for the amplitude  $A(T)$  and the density  $\rho(T)$  is given in Eq. 10 and Eq. 9, and can be generalized (Hannay & Ozorio De Almeida 1984), leading to the conclusion that for generic chaotic systems (Berry 1985) the form factor is a linear function of  $T$  i.e.  $K(T) \propto T$  (up to the Ehrenfest time), which is in accordance with the predictions of GOE (Bohigas 1991). Such a result does not predict the occurrence of peaks in the autocorrelation. We will show that the same theory but using the specific density of periodic orbits of our system leads to a different result predicting autocorrelation peaks.

#### 4.1.2. Distribution of acoustic travel times

To this aim, we need to model the density  $\rho(T)$  of periodic orbit travel times in our system. First, we define a chord as a portion of orbit between two consecutive rebounds at the surface. From this definition, a trajectory that bounces  $n$  times at the surface will be called a  $n$ -chord. For any integer  $n$ , periodic trajectories with  $n$  rebounds are a subset of  $n$ -chord trajectories. As already mentioned, we do not know any systematic way of finding all the periodic orbits in the system. Nonetheless, we may infer

some of their properties by studying large samples of  $n$ -chord trajectories.

At a given rotation rate, we compute the acoustic travel times of thousands of  $n$ -chord trajectories. The 1-chord distribution is shown in the right panel of Fig. 16, at  $\Omega/\Omega_k = 0.481$ . The distribution is a narrow packet : its standard deviation  $\sigma_0$  is small compared to its mean value  $T_0$ . We interpret this effect as a consequence of the strong decrease of the sound speed near the surface<sup>3</sup>. Indeed, the trajectories travel rapidly through the core of the star and the acoustic time is dominated by the surface behavior, so the actual length of the trajectory has very little impact on its travel time. We expect the characteristic time  $T_0$  to increase with rotation, because of the increasing volume of the star. This is indeed confirmed, with  $T_0 = 5.19/\omega_p$  at  $\Omega/\Omega_k = 0.481$  and  $T_0 = 6.30/\omega_p$  at  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ .

Moreover, due to the centrifugal deformation, the region where the sound speed is very small widens at the equator. Hence the dispersion of travel times must increase as well with rotation, as can be seen by comparing, for instance, the chord joining the two poles with the chord joining opposite points on the equator. The total distribution of  $n$ -chords with  $n \leq 20$ , with the same number of orbits for all values of  $n$ , is represented in Fig. 16, panels (a) and (b) at rotations  $\Omega/\Omega_k = 0.481$  and  $\Omega/\Omega_k = 0.809$ . The packets are evenly spaced out ( $T_n \approx nT_0$ ) but get thicker as  $n$  increases ( $\sigma_n \approx \sqrt{n}\sigma_0$ ), since each packet can be seen as the sum of  $n$  independent variables. Thus this packet structure will disappear when  $n$  becomes large, i.e. for long travel times. An important difference between the two distributions shown in Fig. 16 is the rate at which adjacent packets overlap, leading to the disappearance of the packet structure. This is quantified by the ratio  $\sigma_0/T_0$  which is 0.049 at  $\Omega/\Omega_k = 0.481$  and 0.097 at  $\Omega/\Omega_k = 0.809$ .

The constraints imposed by the  $n$ -chord acoustic time distribution could be strong enough to impose a kind of periodic oscillation in the distribution of periodic orbits, and thus in the form factor  $K(T)$ . This oscillation could then produce a peak in the autocorrelation in virtue of the Fourier relation<sup>4</sup>. We will now show that it is indeed the case

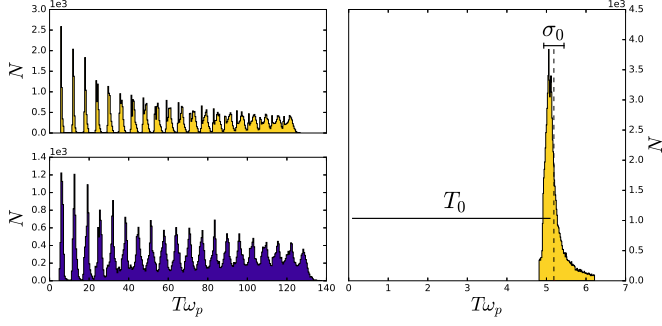
To this aim, we model the distribution of travel times as a sum of Gaussian functions :  $P_\Omega(T) = \sum_n P_{n,\Omega}(T)$ , with  $P_{n,\Omega}(T)$  the probability distribution of  $n$ -chords travel times :

$$P_{n,\Omega}(T) = \frac{T_0}{\sqrt{2\pi n} \sigma_0} \exp\left(-\frac{(T - nT_0)^2}{2(\sqrt{n}\sigma_0)^2}\right), \quad (18)$$

where  $T_0$ , in the prefactor, has been added for normalization purposes. It is a crude approximation but it encapsulates in a simple form all the relevant properties of the distributions, namely the presence of regularly spaced packets and their widening with increasing  $n$ . One has to keep in mind that the dependency on  $\Omega$  is not explicit but hidden in the values of  $T_0$

<sup>3</sup> To test this hypothesis, we computed the acoustic time distribution in a domain shaped like a  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  rotating star, but with a homogeneous sound speed throughout the interior. It results in a distribution whose dispersion is of the same order as the mean value :  $\sigma_0 \approx 0.32 T_0$ .

<sup>4</sup> Looking closely, one can discern a very narrow peak inside each packet. It is created by trajectories trapped near the main island (see subsection 4.2) and will have no significant impact on the autocorrelation



**Fig. 16.** Left panels : Number of  $n$ -chord trajectories, with  $n = 1, \dots, 20$ , vs their travel time  $T$  at rotations  $\Omega/\Omega_k = 0.481$  (top) and  $\Omega/\Omega_k = 0.809$  (bottom), with 300 bins for the total distribution. The  $n$ -chord samples contain  $\sim 4200$  chords each. Right panel : the  $\Omega/\Omega_k = 0.481$  1-chord distribution in more details, with  $\sim 84000$  chords and 100 bins. The mean value  $T_0$  of the distribution is marked with a dashed line and the standard deviation  $\sigma_0$  is shown.

and  $\sigma_0$ . Finally, we need to take into account the fact that the number of trajectories of acoustic time  $T$  grows with  $T$ . Thus, we write  $\rho(T) = (1/T)e^{\lambda T} \times P_\Omega(T)$  and the form factor becomes  $K(T) \propto A^2(T) \rho(T) = T P_\Omega(T)$ .

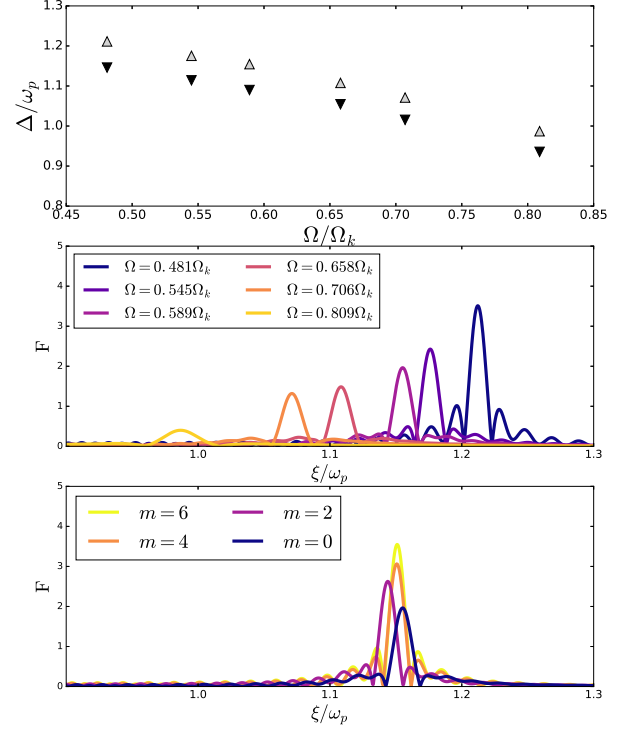
The Fourier transform of this quantity

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dT \exp(-i\xi T) T P_\Omega(T),$$

is shown in the middle panel of Fig. 17 for six rotations corresponding to the simulated chaotic spectra. This quantity is a semiclassical approximation of  $C(\xi)$  (see Eq. 12) and is closely related to the autocorrelation  $R_2(\xi)$  (see Fig. 9). The results show that the periodic orbit theory based on the ray model indeed predicts a peak in the autocorrelation. In the middle panel of Fig. 17, its theoretical position  $\Delta_c^{\text{th}}$  moves with rotation, as in the numerical mode computations, from  $1.1458 \omega_p$  at  $\Omega/\Omega_k = 0.481$  to  $0.9254 \omega_p$  at  $\Omega/\Omega_k = 0.809$ . In the top panel,  $\Delta_c^{\text{th}}$  is compared to the peak position of the numerical modes  $\Delta_c$ , with good agreement. The position, height and width of the peaks are completely determined by  $T_0$  and  $\sigma_0$ . The position is found straightforwardly as  $\Delta_c^{\text{th}} \approx 2\pi/T_0$ . The height and width are controlled by the ratio  $\sigma_0/T_0$ . Indeed, the condition  $\sigma_0 \ll T_0$  is necessary to clearly distinguish the packets in the distribution of travel times, as in Fig. 16. Due to the increase of  $\sigma_0/T_0$  with rotation, the peak gets less visible at high rotation rates.

The theoretical large separation  $\Delta_c^{\text{th}}$  is not only a function of the rotation rate  $\Omega$ , but also of the projected angular momentum  $\tilde{L}_z$ . In the bottom panel of Fig. 17 we show the predicted peaks for  $\tilde{L}_z = 0, 0.0819/\omega_p, 0.1638/\omega_p$  and  $0.2458/\omega_p$  at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ . The shift in position is governed by the value of  $T_0$  and the change in amplitude by the value of  $\sigma_0$  as  $\tilde{L}_z$  increases. The main difference with the axisymmetric case is a reduction of the domain of propagation, resulting in a smaller standard deviation  $\sigma_0$ . As the mean travel time  $T_0$  between two rebounds depends on the impact of  $\tilde{L}_z$  on the ray paths, it changes slightly in a non monotonic fashion.

We have seen that the sound speed profile in the star imposes restrictions on the travel times of acoustic rays. In spite of the chaotic nature of the dynamics, the small dispersion of



**Fig. 17.** Upper panel : Theoretical large separation  $\Delta_c^{\text{th}}/\omega_p$  (upward triangles) compared to the numerical peak's position (downward triangles) calculated for axisymmetric modes at six rotation rates. Middle panel : theoretical autocorrelations with quantum number  $m = 0$ , from right to left the rotation rate increases. Bottom panel : theoretical autocorrelations at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  with  $m = 0, 2, 4, 6$  and frequency  $\omega = 24.41\omega_p$ .

travel times produces order in the spectra, in the form of a peak in the autocorrelation at a value  $\Delta_c^{\text{th}}$  that corresponds to the mean travel time between two points at the surface. It is fundamentally a radial phenomenon, since the strong variation of the sound speed occurs in the radial direction. Introducing the radial acoustic time at a given colatitude  $\tau(\theta) = \int_0^{r_s(\theta)} dr/\tilde{c}_s$ , where  $r$  is the radial coordinate, the mean acoustic time between two rebounds can be estimated without using ray dynamics, as

$$T^{\text{av}} = 2 \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(\theta) d\theta \right), \quad (19)$$

where the integral is performed over a quarter of the star because of the axial and equatorial symmetries. In the  $m \neq 0$  case, the domain of integration must be adapted, since the acoustic ray cavity is reduced in size. We find that  $2\pi/T^{\text{av}}$  is a good estimation of  $\Delta_c$ . For instance, at  $\omega/\Omega_k = 0.589$ ,  $2\pi/T^{\text{av}} = 1.0996\omega_p$ , which differs from  $\Delta_c$  by less than 1%.

#### 4.2. Secondary peaks

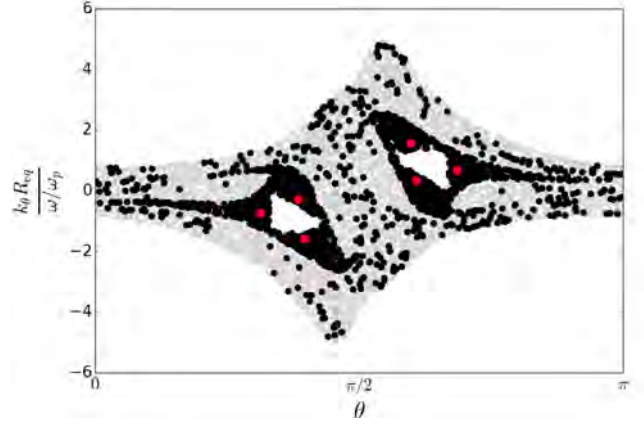
At every rotation there are other peaks in addition to the main peak caused by the large separation of chaotic modes. At rotations higher than  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  some of these peaks raise high above the noise level and we call them secondary peaks. The presence of small amplitude peaks in the autocorrelation

can be understood as reflecting the organization of the chaotic spectra on an échelle diagram, illustrated in Fig. 10. Indeed, the spectrum is organized in families of nearly aligned frequencies. Lets us consider first the case of two perfectly aligned families of frequencies. These two families would produce a peak in the autocorrelation at a position given by the distance between consecutive levels in the two series. This is reminiscent of the case of island modes, that show well-aligned families on the échelle diagram and, accordingly, many peaks are seen in the autocorrelation. In this later case, the effect is strong because the separation  $\delta_\ell = \omega_{n,\ell+1} - \omega_{n,\ell}$  between consecutive families is fixed. In the case of chaotic modes, the alignments are weaker and consecutive series are not regularly spaced out. Thus, we expect the peaks to be of small amplitude.

The high amplitude peaks observed in the data at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  are caused in part by two series, number 1 and 2 in Fig. 10, that are nearly parallel on the échelle diagram. The spacing between these two series indeed corresponds to the position  $\delta$  of the leftmost secondary peak in Fig. 9, panel c. If couples of nearly parallel series can occur occasionally, there is however no reason to expect them at every rotation rate. The presence of strong secondary peaks at other rotation rates (and also in the spectra of non axisymmetric modes) is a hint that a more generic mechanism is at play. Moreover, we know that the spectral statistics of the chaotic spectrum at  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  indicates that it is divided into independent subspectra, as explained in section 3.2.2. In the following, we will argue that the presence of secondary peaks is a consequence of the presence of partial barriers in the phase space of the ray system which create separate independent subsets of modes.

It is known that transport properties in chaotic phase space can have a significant impact on the wave system spectra (Bohigas et al. 1993). The transport of trajectories from a subregion A to another subregion B can be affected by the presence of partial barriers. These are curves through which classically trajectories can flow, but with a much smaller flux than in other parts of phase space. Thus, contrary to KAM tori that act as complete barriers, ergodic trajectories are able to cross partial barriers after a sufficiently long time. Such partial barriers are typically created when the system is being perturbed, through the destabilization of island orbits. In virtue of the Poincaré-Birkhoff theorem (Ott 1993), resonant tori are destroyed by the perturbation and generate new structures in phase space : a new (smaller) island chain around an elliptic central orbit along with an unstable periodic orbit. The unstable orbits created through this process are known to be the source of partial barriers that trap ergodic trajectories (Shim et al. 2011; Bohigas et al. 1993).

Acoustic ray simulations show that two 6-period unstable orbit revolves around the main 2-period island chain at  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ . At  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ , we also find a periodic orbit revolving around the island and strongly suspect the presence of a second one. Moreover, by choosing trajectories with initial conditions around the main island and evolving the system forward in time, we see clearly the contours of the partial barrier reveal themselves (see Fig. 18). For the frequencies considered in our dataset, the partial barriers may act as complete barriers and isolate some modes, as observed in other systems (Shim et al. 2011). Quantitative estimates of the area and outgoing flux have been given in Evano et al. (2019), showing that the barrier grows in size from  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  to  $\Omega/\Omega_k = 0.706$  and that,



**Fig. 18.** Snapshot of the evolution of a bundle of trajectories as they intersect the PSS, represented by black dots, at  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ . The phase space zones where black dots are dense correspond to regions enclosed by partial barriers. The trajectories are initially in the neighborhood of the two main islands. One of the central periodic orbits of these zones is indicated by colored dots (large gray dots).

in parallel, it takes longer to go through the partial barrier at  $\Omega/\Omega_k = 0.706$ . Thus, the trapping of chaotic trajectories around stable islands seems to be the cause of the additional peaks seen in the autocorrelations. Moreover, as the trapped trajectories revolve around a 6-periodic orbit (see Fig. 18), and assuming the modes to quantize like island modes, one can expect that the secondary peaks will be located approximately at  $\Delta_c/3$ . As seen in Fig. 9, this idea is consistent with the data at  $\omega/\omega_k = 0.706$ . However it gives only a rough estimate of the peak position at other rotation rates and thus this issue should be analyzed in more depth. The specific rotations where the trapping of trajectories will be efficient can be anticipated only through precise numerical simulations of the ray model.

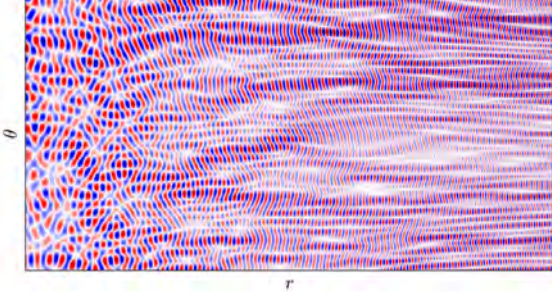
#### 4.3. Amplitude distribution of chaotic modes

Berry proposed that the eigenstates of a classically chaotic system, like quantum billiards, could be modeled by a superposition of random plane waves. Indeed this picture holds locally, in the high frequency regime, where the mode is a superposition of rays of the same magnitude  $|k|$ , but coming from all possible directions. It is easy to test this idea, as done e. g. in O'Connor et al. (1987), by adding multiple time-harmonic solutions of the Helmholtz equation  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ . The waves are of the form  $\psi_n = a_n \cos(\mathbf{k}_n(\alpha_n) \cdot \mathbf{x} + \xi_n)$ , where the amplitude  $a_n$ , the wave vector orientation  $\alpha_n$  and the phase shift  $\xi_n$  are random variables but the magnitude  $|k|$  of the wave vector is fixed. The resulting modes indeed exhibit the random ridges characteristic of chaotic modes.

Contrary to quantum billiards, the wavevector magnitude varies strongly within a star, as it is proportional to the inverse of the sound speed. Moreover, each incoming ray approaching the surface is almost aligned in the radial direction ( $k_r \gg k_\theta$ ). Thus, the hypothesis that intersecting rays come with a large variety of possible orientations is not valid near the surface. We modified slightly the random wave model to incorporate such a behavior. For simplicity, we treat the x axis as a radial direction. Then we impose a radial increase of the magnitude  $|k|$  and that all waves



end up aligned in the radial direction as  $x \rightarrow \infty$ . An example of mode produced in this way is shown in Fig. 19. The mode exhibits random ridges in the center but the outer part is more structured, with nodes regularly spaced radially and irregular in the transverse direction as in the star.



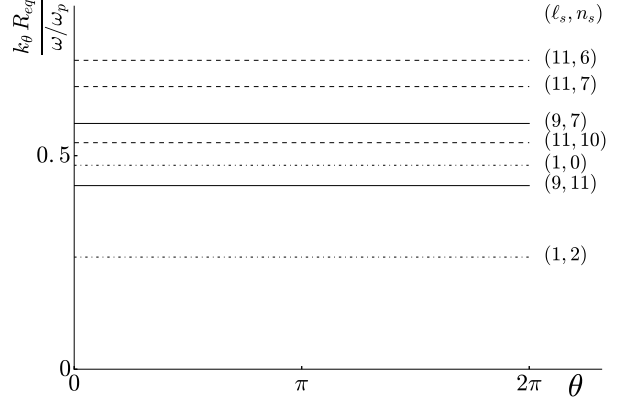
**Fig. 19.** Superposition of random stationary waves reproducing the kind of amplitude patterns seen in the chaotic p-modes of the polytropic stellar model (see text).

#### 4.4. Spectrum organization

In the previous sections, we found that the chaotic spectrum can be described as a set of series of modes, where a series corresponds to modes separated by approximately  $\Delta_c$  and having similar amplitude distribution. Sixteen series have been effectively identified at the rotation rate  $\Omega/\Omega_k = 0.589$  and in the frequency range,  $25.60 \omega_p < \omega < 33.54 \omega_p$ . We also found that whispering gallery modes are present at the low-frequency end of some chaotic series, and that island mode series appears as high-frequency extensions of some other chaotic series. In this section, we use semiclassical arguments to investigate the origin of the different chaotic series and their link with the whispering gallery and island mode spectra.

We first consider a non rotating star because in this case the modes can be precisely located on the PSS. As the system is integrable, the phase space is foliated with  $N_d$ -dimensional tori, where  $N_d$  is the number of degrees of freedom. Modes are then constructed on some of the tori, the ones specified by the Einstein-Brillouin-Keller quantization rules. The quantization of the norm of the angular momentum  $L$ , the invariant associated with the spherical symmetry, reads  $L = \pm(\ell_s + 1/2)$  (Gough 1993) where  $\ell_s$  is the degree of the mode, with the index  $s$  denoting the "spherical" case. For the frequency-scaled coordinates used here, we rather use the invariant  $\tilde{L} = L/\omega = \pm(\ell_s + 1/2)/\omega_{n_s, \ell_s, m}$ , where  $n_s$  and  $m$  are the radial order and the azimuthal order of the mode. In the axisymmetric case,  $L_z = 0$ , the tori imprint the PSS on horizontal lines  $\tilde{k}_\theta = \pm\tilde{L}$  (Lignières & Georgeot 2009). On Fig. 20, the identification of a few mode-carrying tori is displayed. It shows how the position of the tori along the vertical axis depends on  $\ell_s$  and  $n_s$ . For fixed radial order  $n_s$  and increasing  $\ell_s$ , the tori indeed move toward higher  $\tilde{L}$  or  $\tilde{k}_\theta$  values. Similarly, for fixed  $\ell_s$  and increasing  $n_s$ , the tori approach the  $\tilde{k}_\theta = 0$  axis. In particular, the  $\ell_s = 0$  or  $\ell_s = 1$  modes are already close to the central axis for the smallest radial order.

When rotation comes into play, the location of the tori at  $\Omega = 0$  has strong consequences on their fate. From the evolution of the PSS we know that the phase space becomes rapidly dominated by three main structures : the 2-period island chain at low  $\tilde{k}_\theta$ , the large chaotic zone at low and intermediate  $\tilde{k}_\theta$ , and at large  $\tilde{k}_\theta$ , the region of surviving KAM tori corresponding to



**Fig. 20.** Intersection of a few tori with the PSS at  $\Omega/\Omega_k = 0$ . Only the part of the PSS where  $k_\theta > 0$  is shown because of the symmetry with respect to the  $k_\theta = 0$  axis at zero rotation. The tori correspond to modes of degree  $\ell_s = 1$ ,  $\ell_s = 9$  or  $\ell_s = 11$ .

whispering gallery trajectories. In this context, high- $\tilde{L}$  tori at  $\Omega = 0$  will transform into structures of the surviving KAM tori region, whereas low- $\tilde{L}$  tori will be destroyed as the 2-period island chain and the chaotic zone surrounding it emerge. We thus expect high- $\tilde{L}$  modes to become whispering gallery modes, while low- $\tilde{L}$  modes should evolve toward chaotic or island modes.

We can use this phenomenology to predict the fate of a sequence of modes having a fixed degree  $\ell_s$  and variable radial orders  $n_s$ . In such a series,  $\tilde{L}$  has a maximum value for  $n_s = 1$  and it decreases toward zero as  $n_s$  increases. Generically, we thus expect that, as rotation increases, the low- $n_s$  (high- $\tilde{L}$ ) modes become whispering gallery modes, the intermediate- $n_s$  modes become chaotic modes, and the high- $n_s$  (low- $\tilde{L}$ ) modes become island modes. Combining this picture with our observation that some series of chaotic modes show island modes at their high-frequency end or whispering gallery modes at their low-frequency end, we are led to interpret the chaotic series together with their island modes and whispering gallery modes extensions as the remnants of series of given  $\ell_s$  at zero rotation.

At  $\Omega/\Omega_k = 0.589$ , we could indeed relate two chaotic series (the series 1 and 2) with the  $\ell = 4$  and the  $\ell = 5$  odd-parity island mode series, respectively. Following this interpretation and using the formulas that link  $\ell$  to  $\ell_s$  (Reese et al. 2008; Pasek et al. 2012) we can attribute the  $\ell_s = 9$  value to series 1 and the  $\ell_s = 11$  value to series 2. In principle, the  $\ell_s$  value of the other chaotic series shown on Fig. 13 could also be determined, either by following them to higher frequency up to the island mode transition or by looking for a whispering gallery mode and its  $\ell_s$  value at low frequency.

The generic case of a  $\ell_s$  series containing the three type of modes only holds for high enough  $\ell_s$ . The computed PSS indeed show that below a specific  $\tilde{k}_\theta$  that depends on the rotation rate, all trajectories are either chaotic or within an island chain. We thus expect that, below some critical  $\ell_s$  that depends on the rotation rate, all modes in the series are either of the chaotic or island type. Moreover, from numerical studies (Lignières et al. 2006; Reese et al. 2008; Pasek et al. 2012) where  $\ell_s = \{0, 1, 2, 3\}$  modes have been carefully followed with rotation, we know that, for these lowest degree, modes of all orders behave as



**Table 2.** Comparison of the large separation of island modes  $\Delta_i$  and chaotic modes  $\Delta_c$ , obtained from the simulated spectra at six rotations

$\Omega/\Omega_k$	$\Delta_i$	$\Delta_c$	$ \Delta_i - \Delta_c /\Delta_i$
0.481	$1.1644 \omega_p$	$1.1458 \omega_p$	1.60 %
0.545	$1.1288 \omega_p$	$1.0907 \omega_p$	3.38 %
0.589	$1.1021 \omega_p$	$1.1132 \omega_p$	1.01 %
0.658	$1.0543 \omega_p$	$1.0543 \omega_p$	0.00 %
0.706	$1.0155 \omega_p$	$1.0169 \omega_p$	0.14 %
0.809	$0.9345 \omega_p$	$0.9355 \omega_p$	0.10 %

island modes. This is coherent with the fact that their initial  $\tilde{L}$  are all close to the  $\tilde{k}_\theta = 0$  axis.

To summarize, we argued that the chaotic mode spectrum of rapidly rotating stars is organized in series that can be traced back to the fixed  $\ell_s$  series of the non-rotating star. While supported by the analysis of our numerical results, this idea needs to be further tested at other rotations and in other frequency domains. It is also important to stress that without the  $\Delta_c$  organization of the chaotic spectrum, the chaotic series would not exist and we could not attribute  $\ell_s$  value to them. Indeed, tracing back chaotic modes to their integrable counterpart is not possible for typical mixed systems like quantum billiards. Another property that help recognize the link with a high-frequency island mode series is that  $\Delta_i$  is very close to  $\Delta_c$ .

#### 4.5. Mode identification : chaos versus islands

In the numerically computed spectra, the large separations of island modes and chaotic modes are found to be very close to one another (see table 2). The asymptotic theory discussed above gives a natural explanation for this apparent coincidence. Indeed we established that the large separation of chaotic modes is defined asymptotically by  $\Delta_c^{\text{th}} = 2\pi/T_0$ . On the other hand, the large separation of island modes in the asymptotic regime is related to the acoustic time along the central periodic orbit  $\gamma$  by (Pasek et al. 2012)  $\Delta_i = 2\delta_n$  with  $\delta_n = 2\pi/\oint_\gamma (ds/\tilde{c}_s)$ . The closeness of the two peaks is thus due to the closeness of the mean travel time of a chaotic trajectory and the travel time along the central path  $\gamma$ . For the same reason that all chaotic trajectories have almost the same travel time, the acoustic time between two rebounds along the central orbit of the island has to be very close to  $T_0$ .

Despite the proximity of the two peaks, it may be possible to tell them apart by combining odd and even spectra. In this case, the autocorrelation of the island mode spectra shows not only a peak at the large separation but also at half the large separation. This is due to the fact that the island modes are built around a central orbit which is self-retracing, i.e. during a complete period it goes twice through the same points in  $q$  with opposite momenta. For such orbit, the semiclassical quantization for an even or odd spectrum uses a twice shorter orbit than for the full spectrum. In contrast, the odd and even spectra of chaotic modes are built on generic orbits with no such property, and are completely independent. Hence, the autocorrelation of the full chaotic spectrum at a given rotation, with both parities, does not show a peak at half separation.

## 5. Discussion and conclusion

In this paper, we have computed high frequency p-modes in stellar polytropic models for rotation rates between  $\Omega/\Omega_k = 0.48$

and  $\Omega/\Omega_k = 0.81$ . Following the methodology of section 2.3, we have then identified chaotic modes and built a dataset of chaotic frequencies. As expected, the nearest-neighbor statistics of the chaotic spectra for most rotations follow the Wigner-Dyson distribution, a well-known generic property of wave chaos systems. The frequency autocorrelations of the chaotic spectra have been computed. All of them exhibit peaks above the noise level. The presence of peaks in the frequency autocorrelation is clearly not generic in wave chaos systems.

Our analysis shows that chaotic modes are organized in series. The frequency difference between consecutive modes being approximately constant and of similar value across all series. By displaying chaotic mode frequencies on échelle diagrams, we showed that this weakly varying frequency interval can be interpreted as a pseudo large separation. We speak about pseudo large separation because contrary to modes in the non-rotating case or to island modes, the interval is slightly irregular and would remain so asymptotically.

The pseudo large separation is responsible for the presence of the so-called main peak in the frequency autocorrelations and we explained it using semiclassical methods. The ray dynamics is indeed peculiar, as the sound speed is strongly inhomogeneous along the radius of the star. We characterized the impact of the sound speed profile on the ray dynamics through two variables,  $\sigma_0$  and  $T_0$  (see Eq. 18). These two quantities correspond respectively to the mean value and standard deviation of the one-chord travel time distribution. Using the formalism of quantum chaos, we then wrote a semiclassical expression of the autocorrelation and showed that knowing  $\sigma_0$  and  $T_0$  is enough to recover the position of the main peak in the numerically computed spectra. This asymptotic analysis also explains the decrease of the peak height as rotation increases, equivalent to a loss of regularity of chaotic modes. There are other peaks in the autocorrelations, which vary in a less predictable way as a function of rotation. We propose that they are created by the presence of phase space structures that develop around the stable island chains, called partial barriers.

The large separation is expressed as  $\Delta_c \sim 2\pi/T_0$ . Since chaotic trajectories cover the entire meridional plane, at least in the asymmetric case, we found that  $T_0$  can be estimated approximately, without using ray tracing, by computing the average acoustic time over the meridional plane (see Eq. 19).

As explained in section 4.5, the small variance of acoustic travel times ( $\sigma_0/T_0 \ll 1$ ) implies the observed quasi-degeneracy of  $\Delta_i$  and  $\Delta_c$ . Thus, we expect rapidly rotating stars to be characterized by a unique large separation  $\Delta \sim \Delta_i \sim \Delta_c$ . Autocorrelation peaks at the large separation detected in  $\delta$  scuti stars (García Hernández et al. 2015) could be produced not only by island modes, as previously thought, but also in part by chaotic modes. This would be important for stars that rotate rapidly enough to harbor a significant number of chaotic modes. A way to distinguish the contribution of island modes is to look for a peak at half the large separation as our analysis indicates that it is due to island modes only.

To go further in the comparison with observed spectra, one should construct a database of low-frequency synthetic spectra as in Reese et al. (2017) but with full mode identification and with a higher sampling in rotation rate. We expect the asymptotic properties described in the present paper to guide the identification of chaotic modes even at low frequency, as it was the

case for island modes. Having fully identified synthetic spectra then would help to identify modes in real data.

Calculations of mode visibilities in rapid rotators were performed first in Lignières & Georgeot (2009) and later in Reese et al. (2013) taking more effects into account such as gravity darkening. These calculations showed that the surface structure of chaotic modes should allow them to be visible, especially at high rotation rates. The most direct proof of the occurrence of wave chaos in stars would be to identify a large set of observed chaotic mode frequencies and find that they follow closely the Wigner-Dyson surmise. This is a very difficult task, however a couple of observations might reduce the difficulty by a small amount. First, the spectra of many stars with various rotation rates can be aggregated, as we did in Fig. 7 to construct the nearest neighbor distribution. Also, choosing very fast rotators may help, since chaotic modes are expected to be more present at very high rotation rates. Finally, a pole-on configuration can be helpful as avoiding  $m \neq 0$  sub-spectra would simplify mode identification.

*Acknowledgements.* We thank CALMIP (“CALcul en Midi-Pyrénées”) for the use of their supercomputer. We used the code Top developed by D. Reese and made user-friendly by B. Putigny. We thank ISSI (“International Space Science Institute”) through the SoFAR (“Seismology of Fast Rotating Stars”) program for their support.

## Appendix A: Trace formula

In this Appendix we will adapt the semiclassical formalism used in quantum mechanics to derive a trace formula for chaotic modes in rotating stars. The general derivation follows the original one due to Gutzwiller, detailed e.g. in (Gutzwiller 1990; Cvitanovic et al. 2017; Ott 1993).

### Appendix A.1: The Hamiltonian system

We denote the canonically conjugate variables  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , as is usual in textbooks on Hamiltonian mechanics. In the present subsection, we will consider the system to be one-dimensional to avoid carrying indices in the notation. The ray dynamics is governed by the following Hamiltonian :

$$H = \sqrt{c_s^2 k^2 + \omega_c^2} = \omega, \quad (\text{A.1})$$

where the wave vector plays the role of momentum :  $p \equiv k$ .

#### Appendix A.1.1: Hamilton's principal function

We now express  $p$  as a function of  $\dot{q}$  :

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} = 2c_s^2 p / \omega \implies p = \frac{\dot{q} \omega}{2c_s^2}. \quad (\text{A.2})$$

The ray system can thus be seen as analogous to a mechanical system with a varying mass  $\omega/c_s^2$ . Then, the Lagrangian  $L$  is obtained through the usual Legendre transform :

$$L = \dot{q} p - H = \frac{\dot{q}^2 \omega}{2c_s^2} - \omega. \quad (\text{A.3})$$

Hamilton's principal function, denoted  $R$ , is defined as the time integral of the Lagrangian. Its computation involves following a trajectory from  $(q', t')$  to  $(q, t)$ . For short times  $\delta t$ , it gives :

$$R(q, q', \delta t) = \frac{(q - q')^2 \omega}{2c_s^2 \delta t} - \omega \delta t, \quad (\text{A.4})$$

using  $\dot{q} = (q - q')/\delta t$ .

#### Appendix A.1.2: Action integral

The action integral  $S$  is defined from  $R$  as  $S(q, q', \omega) = R(q, q', t) + \omega t = \int_0^t (L + H) dt$ . From Eq. A.3 we have :

$$\begin{aligned} S(q(t), q'(0)) &= \int_0^t \frac{\dot{q}^2 \omega}{2c_s^2} dt \\ &= \int_{q'(0)}^{q(t)} \frac{\dot{q}^2 \omega}{2c_s^2} \frac{dq}{\dot{q}} \\ &= \int_{q'(0)}^{q(t)} \frac{\dot{q} \omega}{2c_s^2} dq = \int_{q'(0)}^{q(t)} p dq, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

which is the well know expression of the action. Finally, the eikonal equation Eq. 2 gives  $\tilde{k} = p/\omega = 1/\tilde{c}_s$ . Thus the action can be written in terms of the acoustic time :

$$S(q, q', \omega) = \omega \int_{q'}^q \frac{ds}{\tilde{c}_s}, \quad (\text{A.6})$$

where  $s$  is the curvilinear coordinate along the ray path.

### Appendix A.2: WKB approximation for the semiclassical propagator

We first derive the expression for the semiclassical propagator, adapting the method in (Cvitanovic et al. 2017) for quantum systems to our star model, which has two degrees of freedom and a four-dimensional phase space. Let  $\Lambda^{-1}$  be a small dimensionless parameter. In the wave equation, Eq. 1, we insert the WKB ansatz  $\Psi(q, t) = A e^{i\Lambda\phi(q,t)}$  leading to (Gough 1993) :

$$(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{\Lambda^2} (\omega_c^2 + c_s^2 k^2) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\Lambda \partial_t \phi \pm (\omega_c^2 + c_s^2 k^2)^{1/2} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Eq. A.7 can be recognized as the Hamilton-Jacobi equation  $\partial R/\partial t = \pm H$ . Thus, in the limit of small wavelengths, the phase is simply Hamilton's principal function :  $\phi = R$  or  $\phi = -R$  (associated to the Hamiltonian  $-H$ ). The two possible phases lead to two terms in the propagator, with a projector on each subspace  $P_1$  and  $P_2$  satisfying  $P_1 + P_2 = I$ .

Additionally, the substitution  $\dot{\phi} = -H = -\omega$  yields :

$$\frac{\partial}{\partial t} (A^2) + \frac{c_s^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial q} \left( A^2 \frac{\partial R}{\partial q} \right) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Introducing the density  $\rho = A^2$  and velocity  $v = 1/m (\partial R/\partial q)$ , with  $m = \omega/c_s^2$  (from the mechanical analogy introduced in section A.1.1), Eq. A.9 appears as a continuity equation. It follows that the ray amplitude  $A(q, t)$  can be interpreted as the square root of the density of nearby trajectories. The evolution of this density from  $q'$  to  $q$  (variation of volume in coordinate space of a swarm of trajectories) is quantified through the Jacobian determinant  $\det \left( \frac{\partial q}{\partial q'} \right)$ .

Having now both the phase and amplitude, we obtain the semiclassical wave function

$$\begin{aligned} \Psi_{sc}(q, t) &= A_1 \int dq' \left| \det \frac{\partial q}{\partial q'} \right|^{1/2} e^{iR(q,q',t)} \Psi_{sc}(q', 0) \\ &+ A_2 \int dq' \left| \det \frac{\partial q}{\partial q'} \right|^{1/2} e^{-iR(q,q',t)} \Psi_{sc}(q', 0), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

where  $A_1$  and  $A_2$  are the projection of the initial wave function on the two subspaces. This is valid for short time, i.e. when only one classical trajectory connects  $q'$  to  $q$  in time  $t$ . For longer times, several trajectories which we label by  $j$  connect the two points, and the formula becomes:

$$\begin{aligned} \Psi_{sc}(q, t) &= A_1 \int dq' \sum_j \left| \det \frac{\partial q}{\partial q'} \right|^{1/2} e^{iR_j(q,q',t) - i\kappa_j \pi/2} \Psi_{sc}(q', 0) \\ &+ A_2 \int dq' \sum_j \left| \det \frac{\partial q}{\partial q'} \right|^{1/2} e^{-iR_j(q,q',t) - i\kappa_j \pi/2} \Psi_{sc}(q', 0), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

where the topological index  $\kappa$  is added to account for the phase shift at points where the amplitude becomes singular, such as caustics.

The propagator  $K$  is defined by

$$\psi(q, t) = \int dq' K(q, q', t) \psi(q', 0). \quad (\text{A.12})$$

The propagator is the time-dependent Green's function, it is thus solution of the wave equation with the initial condition  $\lim_{t \rightarrow 0} K(q, q', t) = \delta(q - q')$ . Again, we will assume that, for short times  $\delta t$ , the semiclassical propagator is of the form (for the first term, the computation is similar for the second term)

$$K_{sc}(q, q', \delta t) = A(q, q', \delta t) e^{iR(q, q', \delta t)}. \quad (\text{A.13})$$

Neglecting the second term  $\omega \delta t$  in A.4 gives

$$K_{sc}(q, q', \delta t) = A(q, q', \delta t) e^{i \frac{\omega}{2c_s^2 \delta t} (q - q')^2}. \quad (\text{A.14})$$

If we impose  $A(q, q', \delta t) = (\frac{\omega}{2\pi i c_s^2 \delta t})$ , then the previous expression is a 2-dimensional Gaussian of width  $\sigma = (\delta t c_s^2 / \omega)^{1/2}$ . In the limit  $\delta t = 0$  the condition  $K(q'', q', t = 0) = \delta(q - q')$  is satisfied. Using again the substitution  $m = \omega / c_s^2$  for clarity

$$K_{sc}(q, q', \delta t) = \left( \frac{m}{2\pi i \delta t} \right) e^{iR(q, q', \delta t)}, \quad (\text{A.15})$$

using the fact that  $m / \delta t = \det(-\frac{\partial p'}{\partial q}) = \det(-\frac{\partial^2 R}{\partial q \partial q'})$  the expression becomes

$$K_{sc}(q, q', t) = (2\pi i)^{-1} \left| \det \frac{\partial^2 R}{\partial q \partial q'} \right|^{1/2} e^{iR_j(q, q', t)}. \quad (\text{A.16})$$

This short time expression with the correct limit at  $t \rightarrow 0$  can be extended to longer times using Eq. A.11 and the fact that  $\det \frac{\partial p'}{\partial q} \det \frac{\partial q}{\partial q'} = \det \frac{\partial p'}{\partial q'}$ . This gives:

$$\begin{aligned} K_{sc}(q, q', t) = & A_1 \sum_j (2\pi i)^{-1} \left| \det \frac{\partial^2 R}{\partial q \partial q'} \right|^{1/2} e^{iR_j(q, q', t) - i\kappa_j \pi / 2} \\ & + A_2 \sum_j (2\pi i)^{-1} \left| \det \frac{\partial^2 R}{\partial q \partial q'} \right|^{1/2} e^{-iR_j(q, q', t) - i\kappa_j \pi / 2}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

where the sum is over all classical trajectories labelled by  $j$  from  $q'$  to  $q$  in time  $t$ .

### Appendix A.3: Green's function

To derive the trace formula, the usual procedure necessitates in quantum mechanical systems to go from the propagator to the energy-dependent Green function  $G(q, q', E)$ , which is related to the propagator through the Fourier transform

$$G(q, q', E) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty K(q, q', t) e^{\frac{i}{\hbar} E t + \frac{\epsilon t}{\hbar}} dt, \quad (\text{A.18})$$

where  $\epsilon$  is a small positive number which makes the integral convergent and goes to zero eventually. Then one uses the fact that  $G(q, q', E)$  can be expanded on a basis of eigenvector  $\{\phi_j\}$  of the Hamiltonian with eigenvalues  $E_n$  as

$$G(q, q', E) = \sum_n \frac{\phi_n^*(q) \phi_n(q')}{E - E_n + i\epsilon}. \quad (\text{A.19})$$

In the semiclassical approximation this leads to the following equality for  $E/\hbar \rightarrow \infty$

$$\sum_n \frac{\phi_n^*(q) \phi_n(q')}{E - E_n + i\epsilon} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty K_{sc}(q, q', t') e^{\frac{i}{\hbar} E t'} dt, \quad (\text{A.20})$$

which is valid at first order in  $\hbar$  (acoustic case : first order in  $\Lambda^{-1}$ ). One can already forecast the trace formula from this equality, as it involves both the eigenenergies of the quantum system on the left-hand side and classical quantities in the right-hand side. We now need to find out an expression similar to Eq. A.20 for the acoustic waves.

The propagator can be found by taking the matrix element of the evolution operator  $U(t, 0)$  between the final and initial states  $|q\rangle$  and  $|q'\rangle$ , (see e. g. (Cohen-Tannoudji et al. 1977)) :

$$K(q, q', t) = \langle q | U(t, 0) | q' \rangle. \quad (\text{A.21})$$

$U(t, 0)$  satisfies the wave equation :  $\partial^2 / \partial t^2 U(t) = -\hat{H}^2 U(t, 0)$ , where  $\hat{H}$  is the Hamiltonian operator with  $\hat{H}^2 = c_s^2 \nabla^2 + \omega_c^2$ . Then:

$$U(t, 0) = P_1 e^{-i\hat{H}t} + P_2 e^{i\hat{H}t}, \quad (\text{A.22})$$

with  $P_1$  and  $P_2$  projectors in two subspaces as above. Let  $|\phi_n\rangle$  be the eigenfunctions of the Hamiltonian  $\hat{H}$ . Then, from the closure relation, we have :

$$U(t, 0) = \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| (A_1 e^{-i\omega_n t} + A_2 e^{i\omega_n t}), \quad (\text{A.23})$$

where  $A_1$  and  $A_2$  are the projection of the initial wave function on the two subspaces. Using Eq. A.23 in Eq. A.21 gives :

$$K(q, q', t) = \sum_n \phi_n^*(q) \phi_n(q') (A_1 e^{-i\omega_n t} + A_2 e^{i\omega_n t}), \quad (\text{A.24})$$

The  $\omega$  dependent Green's function  $G(q'', q', \omega)$  stems from the Fourier transform of  $K(q, q', 0)$ :

$$\begin{aligned} G_\pm(q, q', \omega) = & \sum_n \phi_n^*(q) \phi_n(q') \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{-i(\omega \pm \omega_n)t + \epsilon t} dt \\ = & A_1 \sum_n \frac{\phi_n^*(q) \phi_n(q')}{\omega - \omega_n + i\epsilon} + A_2 \sum_n \frac{\phi_n^*(q) \phi_n(q')}{\omega + \omega_n + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

On the other hand, the semiclassical Green's function is obtained by taking the Fourier transform of the semiclassical propagator A.17 and evaluating it by stationary phase; one starts from

$$G_{sc}(q, q', \omega) = \frac{1}{i} \int_0^\infty K_{sc}(q, q', t) e^{i\omega t} dt. \quad (\text{A.26})$$

The phase term of the integrand is the action  $R(q, q', t) + \omega t = S(q, q', \omega)$  or  $-R(q, q', t) + \omega t = S'(q, q', \omega)$ . Stationary points of the first sum are such that  $\frac{\partial R(q, q', t)}{\partial t} + \omega = 0$  which correspond to classical trajectories from  $q'$  to  $q$  at frequency  $\omega$ . As usual one

expands the integrand in Eq. A.26 in powers of  $t$  at second order. Then the integral is approximated by the method of stationary phase (Schulman 1996). Again, the computation of the prefactor requires to combine the prefactor of A.17 with the one coming from the stationary phase. The second sum has stationary points at or  $\frac{\partial R(q, q', t)}{\partial t} - \omega = 0$ . The result is:

$$G_{sc}(q, q', \omega) = A_1 \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \sum_j \left| \frac{1}{\dot{q}\dot{q}'} \frac{\partial^2 S}{\partial q_\perp \partial q'_\perp} \right|^{1/2} e^{iS_j(q, q', \omega) - ik'_j \pi/2} + A_2 \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \sum_j \left| \frac{1}{\dot{q}\dot{q}'} \frac{\partial^2 S}{\partial q_\perp \partial q'_\perp} \right|^{1/2} e^{iS'_j(q, q', \omega) - ik'_j \pi/2}, \quad (\text{A.27})$$

where the sum is over all classical trajectories from  $q'$  to  $q$  at frequency  $\omega$ ,  $\dot{q}$  and  $\dot{q}'$  are final and initial velocities, and  $q_\perp$  and  $q'_\perp$  are coordinates transverse to the orbit. The index  $k'_j$  counts again the singularities along the orbits.

#### Appendix A.4: The final formula

To obtain the trace formula, we should compute the trace of the Green's function from the two formulas we obtained, Eq. Eq. A.25 and Eq. A.27. We will now keep only the first part in both equations since each term in one equation is equal to its counterpart in the other. Let us first compute the trace of Green's function from Eq. A.25. To this aim, let the small imaginary part in the denominator go to zero and get for the imaginary part:

$$\text{Im Tr } G(q, q', \omega) = -\frac{1}{\pi} \sum_j \delta(\omega - \omega_j). \quad (\text{A.28})$$

On the other hand, the trace of the semiclassical Green's function Eq. A.27 is:

$$\text{Tr } G_{sc} = \int dq G_{sc}(q, q, \omega) = \int dq \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \sum_j \left| \frac{1}{\dot{q}\dot{q}'} \frac{\partial^2 S}{\partial q_\perp \partial q'_\perp} \right|^{1/2} e^{iS_j(q, q, \omega) - ik'_j \pi/2}, \quad (\text{A.29})$$

This formula is an integral involving all closed classical paths from  $q$  to  $q$  at frequency  $\omega$ . It contains two parts. The first one corresponds to the limit for  $q \rightarrow q'$  of the short direct trajectories between  $q$  and  $q'$ , which become of zero length. We call it  $\text{Tr } G_0$  and it should be treated separately. The remaining contains a sum of closed orbits between  $q$  and  $q$  with nonzero length. We evaluate this sum again by stationary phase; the stationary points in the sum are such that the first derivative of the function in the exponential is cancelled. This implies that  $\frac{\partial S(q, q', \omega)}{\partial q'} + \frac{\partial S(q, q', \omega)}{\partial q} = 0$  for  $q = q'$ . This selects closed trajectories with equal initial and final momentum, thus periodic orbits. Again, the prefactors are to be combined correctly, yielding to:

$$\text{Tr } G_{sc}(q, q', \omega) = \text{Tr } G_0 + \sum_j \frac{1}{i} T_j |\det(M_i - I)|^{-1/2} e^{iS_j(\omega) - ik'_j \pi/2}, \quad (\text{A.30})$$

where  $i$  labels all the periodic orbits of the system, including repetitions of a primitive orbit,  $M_i$  is the monodromy matrix describing the linearized motion in the transverse direction to the orbit; the determinant encodes the stability of this orbit  $i$ .  $T_i$  is the geometrical period of the orbit (i.e. without counting the repetitions).

Eq. A.28 connects the trace of the Green's function to the density of states  $\sum_j \delta(\omega - \omega_j)$ . It is known that this sum can be split in two parts  $d(\omega) = \bar{d}(\omega) + d^{osc}(\omega)$ . The first term corresponds to the smooth part of the density of states, while the second part contains the fluctuating (oscillatory) part. It turns out that  $\bar{d}(\omega)$  corresponds to  $\text{Tr } G_0$ , while the oscillatory part corresponds to the remaining part of Eq. A.30. Putting together Eq. A.28 for positive frequencies and Eq. A.30 gives the Gutzwiller formula for the acoustic waves:

$$d^{osc}(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \sum_j T_j |\det(M_i - I)|^{-1/2} e^{iS_j(\omega) - ik'_j \pi/2}. \quad (\text{A.31})$$

## References

- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, *Asteroseismology*, Astronomy & Astrophysics Library (Springer Netherlands)
- Ballot, J., Lignières, F., & Reese, D. R. 2013, *Numerical Exploration of Oscillation Modes in Rapidly Rotating Stars*, ed. M. Goupil, K. Belkacem, C. Neiner, F. Lignières, & J. J. Green, Vol. 865, 91
- Berry, M. V. 1985, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 400, 229
- Berry, M. V. & Robnik, M. 1984, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 17, 2413
- Bogomolny, E. & Hugues, E. 1998, *Physical Review E*, 57, 5404
- Bogomolny, E. B., Georgeot, B., Giannoni, M.-J., & Schmit, C. 1992, *Physical Review Letters*, 69, 1477
- Bogomolny, E. B., Georgeot, B., Giannoni, M.-J., & Schmit, C. 1997, *Physics Reports*, 291, 219
- Bogomolny, E. B. & Keating, J. P. 1996, *Physical Review Letters*, 77, 1472
- Bohigas, O. 1991, *Random matrix theories and chaotic dynamics*, M.-J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin, *Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics*, LII (North-Holland, Amsterdam), 87–199
- Bohigas, O., Tomsovic, S., & Ullmo, D. 1993, *Physics Reports*, 223, 43
- Bowman, D. M. & Kurtz, D. W. 2018, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476, 3169
- Chang, S.-J. & Shi, K.-J. 1986, *Physical Review A*, 34, 7
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., & Laloe, F. 1977, *Mécanique quantique* (293 rue Lecourbe, 75015 Paris: Hermann)
- Cvitanovic, P., Artuso, R., Mainieri, R., Tanner, G., & Vattay, G. 2017, *Chaos: Classical and Quantum* (<http://chaosbook.org/>)
- Evano, B., Georgeot, B., & Lignières, F. 2019, *EPL*, 125, 49002
- García Hernández, A., Martín-Ruiz, S., Monteiro, M. J. P. F. G., et al. 2015, *The Astrophysical Journal Letters*, 811, L29
- García Hernández, A., Moya, A., Michel, E., et al. 2009, *Astronomy & Astrophysics*, 506, 79
- García Hernández, A., Moya, A., Michel, E., et al. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 559, A63
- Gough, D. 1993, *Linear adiabatic stellar pulsation*, J.-P. Zahn and J. Zinn-Justin, *Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics*, XLVII (Elsevier, Amsterdam), 400–560
- Gutzwiller, M. C. 1990, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, *Interdisciplinary Applied Mathematics* (New York: Springer-Verlag)
- Hannay, J. H. & Ozorio De Almeida, A. M. 1984, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 17, 3429
- Hansen, C. J., Kawaler, S. D., & Trimble, V. 2004, *Stellar Interiors: Physical Principles, Structure, and Evolution*, 2nd edn., *Astronomy & Astrophysics Library* (New York: Springer-Verlag)
- Kudrolli, A., Sridhar, S., Pandey, A., & Ramaswamy, R. 1994, *Physical Review E*, 49, R11
- Lignières, F. & Georgeot, B. 2008, *Physical Review E*, 78, 016215
- Lignières, F. & Georgeot, B. 2009, *Astronomy & Astrophysics*, 500, 1173
- Lignières, F., Rieutord, M., & Reese, D. 2006, *Astronomy & Astrophysics*, 455, 607
- Mehta, M. 2004, *Random Matrices* (Elsevier)
- Michel, E., Dupret, M.-A., Reese, D., et al. 2017, in *European Physical Journal Web of Conferences*, Vol. 160, 03001



# Bibliographie

- R. Adler, Downarowicz, and M. Misiurewicz. Topological entropy. *Scholarpedia*, 2008. URL [http://www.scholarpedia.org/article/Topological\\_entropy](http://www.scholarpedia.org/article/Topological_entropy).
- C. Aerts, J. Christensen-Dalsgaard, and D. W. Kurtz. *Asteroseismology*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer Netherlands, 2010.
- Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux. The Distribution of the Ratio of Consecutive Level Spacings in Random Matrix Ensembles. *Physical Review Letters*, 110(8) :084101, February 2013.
- V. M. Babic and V. S. Buldyrev. *Short-Wavelength Diffraction Theory : Asymptotic Methods*. Springer Series on Wave Phenomena. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1972. URL <https://www.springer.com/us/book/9783642834615>.
- A. Bäcker, S. Fürstberger, and R. Schubert. Poincaré Husimi representation of eigenstates in quantum billiards. *Physical Review E*, 70(3) :036204, September 2004. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.70.036204>.
- A. Baecker, F. Steiner, and P. Stifter. Spectral Statistics in the Quantized Cardioid Billiard. pages arXiv :chao-dyn/9412007, December 1994. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1994chao.dyn.12007B>.
- A. Baglin, M. Auvergne, L. Boissard, T. Lam-Trong, P. Barge, C. Catala, M. Deleuil, E. Michel, and W. Weiss. CoRoT : a high precision photometer for stellar evolution and exoplanet finding. volume 36, page 3749, 2006. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006cosp...36.3749B>.
- A. Baglin, M. Auvergne, P. Barge, M. Deleuil, E. Michel, and The CoRoT Exoplanet Science Team. CoRoT : Description of the Mission and Early Results. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 4 (S253) :71–81, May 2008. URL <https://www.cambridge.org/core/journals/proceedings-of-the-international-astronomical-union/article/corot-description-of-the-mission-and-early-results/077C2E9746CEDADC4055C5C09D22DD13>.
- J. Ballot, F. Lignières, D. R. Reese, and M. Rieutord. Gravity modes in rapidly rotating stars - Limits of perturbative methods. *Astronomy & Astrophysics*, 518 :A30, July 2010. URL <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2010/10/aa14426-10/aa14426-10.html>.
- L. A. Balona and W. A. Dziembowski. Kepler observations of  $\delta$  Scuti stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 417(1) :591–601, October 2011. URL <https://academic.oup.com/mnras/article/417/1/591/980406>.

- M. V. Berry. Semiclassical theory of spectral rigidity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 400 (1819) :229–251, August 1985. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/400/1819/229>.
- M. V. Berry and M. Robnik. Semiclassical level spacings when regular and chaotic orbits coexist. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 17(12) :2413–2421, August 1984.
- M. V. Berry and M. Tabor. Level clustering in the regular spectrum. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 356(1686) :375, September 1977.
- M.V. Berry. *Some quantum-to-classical asymptotics*, pages 251–303. M.-J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin, Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics, LII. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- R. Blümel, T. M. Antonsen, B. Georgeot, E. Ott, and R. E. Prange. Ray splitting and quantum chaos. *Physical Review E*, 53(4) :3284–3302, April 1996. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.53.3284>.
- E. B. Bogomolny. Quantum and Arithmetical Chaos. *arXiv :nlin/0312061*, December 2003. URL <http://arxiv.org/abs/nlin/0312061>. arXiv : nlin/0312061.
- E. B. Bogomolny, B. Georgeot, M.-J. Giannoni, and C. Schmit. Chaotic billiards generated by arithmetic groups. *Physical Review Letters*, 69 :1477–1480, September 1992. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/1992PhRvL..69.1477B>.
- E. B. Bogomolny, B. Georgeot, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Arithmetical chaos. *Physics Reports*, 291(5) :219–324, December 1997. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157397000161>.
- O. Bohigas. *Random matrix theories and chaotic dynamics*, pages 87–199. M.-J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin, Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics, LII. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws. *Physical Review Letters*, 52 :1, 1984.
- O. Bohigas, S. Tomsovic, and D. Ullmo. Manifestations of classical phase space structures in quantum mechanics. *Physics Reports*, 223(2) :43–133, January 1993. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739390109Q>.
- S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, and J.-A. Marck. Numerical approach for high precision 3d relativistic star models. *Physical Review D*, 58(10) :104020, October 1998. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.104020>.
- W. J. Borucki, D. Koch, G. Basri, N. Batalha, T. Brown, D. Caldwell, J. Caldwell, J. Christensen-Dalsgaard, W. D. Cochran, E. DeVore, E. W. Dunham, A. K. Dupree, T. N. Gautier, J. C. Geary, R. Gilliland, A. Gould, S. B. Howell, J. M. Jenkins, Y. Kondo, D. W. Latham, G. W. Marcy, S. Meibom, H. Kjeldsen, J. J. Lissauer, D. G. Monet, D. Morrison, D. Sasselov, J. Tarter, A. Boss, D. Brownlee, T. Owen, D. Buzasi, D. Charbonneau, L. Doyle, J. Fortney, E. B. Ford, M. J. Holman, S. Seager,



- J. H. Steffen, W. F. Welsh, J. Rowe, H. Anderson, L. Buchhave, D. Ciardi, L. Wolkowicz, W. Sherry, E. Horch, H. Isaacson, M. E. Everett, D. Fischer, G. Torres, J. A. Johnson, M. Endl, P. MacQueen, S. T. Bryson, J. Dotson, M. Haas, J. Kolodziejczak, J. Van Cleve, H. Chandrasekaran, J. D. Twicken, E. V. Quintana, B. D. Clarke, C. Allen, J. Li, H. Wu, P. Tenenbaum, E. Verner, F. Bruhweiler, J. Barnes, and A. Prsa. Kepler Planet-Detection Mission : Introduction and First Results. *Science*, 327 :977, February 2010. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010Sci...327..977B>.
- D. M. Bowman and D. W. Kurtz. Characterising the observational properties of  $\delta$  Sct stars in the era of space photometry from the Kepler mission. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476(3) :3169–3184, May 2018. URL <https://academic.oup.com/mnras/article/476/3/3169/4893728>.
- R. W. Brankin, I. Gladwell, and L. F. Shampine. Rksuite : A suite of explicit runge-kutta codes. In *Contributions in Numerical Mathematics*, pages 41–53. World Scientific, 1993.
- J.-S. Caux and J. Mossel. Remarks on the notion of quantum integrability. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2011(02) :P02023, February 2011. doi : 10.1088/1742-5468/2011/02/P02023.
- S.-J. Chang and K.-J. Shi. Evolution and exact eigenstates of a resonant quantum system. *Physical Review A*, 34(1) :7–22, July 1986. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.34.7>.
- P. A. Chinnery and V. F. Humphrey. Experimental visualization of acoustic resonances within a stadium-shaped cavity. *Physical Review E*, 53(1) :272–276, January 1996. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.53.272>.
- B. V. Chirikov. Research concerning the theory of non-linear resonance and stochasticity. Technical report, CM-P00100691, 1971.
- J. Christensen-Dalsgaard. *Lecture Notes on Stellar Oscillations*. 5 edition, 2003.
- C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique quantique*. Hermann, 1980.
- T. G. Cowling. The non-radial oscillations of polytropic stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 101 :367, 1941. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/1941MNRAS.101..367C>.
- J. P. Cox and R. T. Giuli. *Principles of stellar structure*. 1968.
- M. S. Cunha, C. Aerts, J. Christensen-Dalsgaard, A. Baglin, L. Bigot, T. M. Brown, C. Catala, O. L. Creevey, A. Domiciano de Souza, P. Eggenberger, P. J. V. Garcia, F. Grundahl, P. Kervella, D. W. Kurtz, P. Mathias, A. Miglio, M. J. P. F. G. Monteiro, G. Perrin, F. P. Pijpers, D. Pourbaix, A. Quirrenbach, K. Rousselet-Perraut, T. C. Teixeira, F. Thevenin, and M. J. Thompson. Asteroseismology and Interferometry. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 14(3-4) :217–360, November 2007. URL <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00159-007-0007-0>.

- S. Deheuvels, R. A. García, W. J. Chaplin, S. Basu, H. M. Antia, T. Appourchaux, O. Benomar, G. R. Davies, Y. Elsworth, L. Gizon, M. J. Goupil, D. R. Reese, C. Regulo, J. Schou, T. Stahn, L. Casagrande, J. Christensen-Dalsgaard, D. Fischer, S. Hekker, H. Kjeldsen, S. Mathur, B. Mosser, M. Pinsonneault, J. Valenti, J. L. Christiansen, K. Kinemuchi, and F. Mullally. Seismic Evidence for a Rapidly Rotating Core in a Lower-giant-branch Star Observed with Kepler. *The Astrophysical Journal*, 756 :19, September 2012. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2012ApJ...756...19D>.
- R. G. Deupree, D. Castañeda, F. Peña, and C. I. Short. Matching the Spectral Energy Distribution and P-mode Oscillation Frequencies of the Rapidly Rotating Delta Scuti Star  $\alpha$  Ophiuchi with a Two-dimensional Rotating Stellar Model. *The Astrophysical Journal*, 753 :20, July 2012. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2012ApJ...753...20D>.
- V. Domingo, B. Fleck, and A. I. Poland. The SOHO mission : An overview. *Solar Physics*, 162(1) :1–37, December 1995. URL <https://doi.org/10.1007/BF00733425>.
- H. R. Dullin and A. Bäcker. About ergodicity in the family of limaçon billiards. *Nonlinearity*, 14(6) :1673–1687, October 2001. URL <https://doi.org/10.1088/0951-7715/14/6/2F0951>.
- M.-A. Dupret, A. Grigahcène, R. Garrido, M. Gabriel, and R. Scuflaire. Theoretical instability strips for  $\delta$  Scuti and  $\delta$  Doradus stars. *Astronomy and Astrophysics*, 414 (2) :L17–L20, February 2004. URL <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2004/05/aafj131/aafj131.html>.
- M.-A. Dupret, A. Grigahcène, R. Garrido, M. Gabriel, and R. Scuflaire. Convection-pulsation coupling. II. Excitation and stabilization mechanisms in  $\delta$  Sct and  $\gamma$  Dor stars. *Astronomy and Astrophysics*, 435 :927–939, June 2005. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2005A%26A...435..927D>.
- W. Dziembowski, M. Krolikowska, and A. Kosovichev. Nonlinear mode coupling in oscillating stars. III - Amplitude limiting effect of the rotation in the Delta Scuti stars. *Acta Astronomica*, 38 :61–75, 1988. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/1988AcA....38...61D>.
- W. A. Dziembowski, D. O. Gough, G. Houdek, and R. Sienkiewicz. Oscillations of alpha UMa and other red giants. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 328 (2) :601–610, December 2001. URL <https://academic.oup.com/mnras/article/328/2/601/1088742>.
- J. England, B. Krauskopf, and H. Osinga. Computing One-Dimensional Stable Manifolds and Stable Sets of Planar Maps without the Inverse. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 3(2) :161–190, January 2004. URL <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/030600131>.
- S. Fishman, D. R. Grempel, and R. E. Prange. Chaos, Quantum Recurrences, and Anderson Localization. *Physical Review Letters*, 49(8) :509–512, August 1982. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.509>.

- A. García Hernández, A. Moya, E. Michel, R. Garrido, J. C. Suárez, E. Rodríguez, P. J. Amado, S. Martín-Ruiz, A. Rolland, E. Poretti, R. Samadi, A. Baglin, M. Auvergne, C. Catala, L. Lefevre, and F. Baudin. Asteroseismic analysis of the CoRoT  $\delta$  Scuti star HD 174936. *Astronomy and Astrophysics*, 506(1) :79–83, October 2009. doi : 10.1051/0004-6361/200911932.
- A. García Hernández, A. Moya, E. Michel, J. C. Suárez, E. Poretti, S. Martín-Ruiz, P. J. Amado, R. Garrido, E. Rodríguez, and M. Rainer. An in-depth study of HD 174966 with CoRoT photometry and HARPS spectroscopy. Large separation as a new observable for  $\delta$  Scuti stars. *Astronomy and Astrophysics*, 559 :A63, Nov 2013.
- A. García Hernández, S. Martín-Ruiz, Mário J. P. F. G. Monteiro, J. C. Suárez, D. R. Reese, J. Pascual-Granado, and R. Garrido. Observational  $\Delta\nu - \bar{\rho}$  Relation for  $\delta$  Scuti Stars using Eclipsing Binaries and Space Photometry. *The Astrophysical Journal Letters*, 811 :L29, October 2015.
- B. Georgeot and R. E. Prange. Fredholm theory for quasiclassical scattering. *Physical Review Letters*, 74(21) :4110, 1995.
- N. Giammichele, S. Charpinet, G. Fontaine, P. Brassard, E. M. Green, V. Van Grootel, P. Bergeron, W. Zong, and M.-A. Dupret. A large oxygen-dominated core from the seismic cartography of a pulsating white dwarf. *Nature*, 554(7690) :73–76, February 2018. URL <https://www.nature.com/articles/nature25136>.
- O. Giraud and K. Thas. Hearing shapes of drums : Mathematical and physical aspects of isospectrality. *Rev. Mod. Phys.*, 82 :2213–2255, Aug 2010. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.2213>.
- D. O. Gough. *Linear adiabatic stellar pulsation*, pages 400–560. J-P. Zahn and J. Zinn-Justin, Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics, XLVII. M.-J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin, Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics, Elsevier, Amsterdam, 1993.
- J. M. Greene. A method for determining a stochastic transition. *Journal of Mathematical Physics*, 20(6) :1183–1201, June 1979. URL <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.524170>.
- M. C. Gutzwiller. Periodic Orbits and Classical Quantization Conditions. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3) :343–358, March 1971. URL <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1665596>.
- M. C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1990.
- J. A. Guzik, A. B. Kaye, P. A. Bradley, A. N. Cox, and C. Neuforge. Driving the Gravity-Mode Pulsations in  $\gamma$  Doradus Variables. *The Astrophysical Journal Letters*, 542(1) :L57, September 2000. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/312908/meta>.
- M. Guzzo, E. Lega, and C. Froeschle’. First numerical evidence of global Arnold diffusion in quasi-integrable systems. *arXiv :nlin/0407059*, July 2004. URL <http://arxiv.org/abs/nlin/0407059>.

- G. Handler. Asteroseismology. *arXiv :1205.6407 [astro-ph]*, pages 207–241, 2013. doi : 10.1007/978-94-007-5615-1\_4. URL <http://arxiv.org/abs/1205.6407>. arXiv : 1205.6407.
- J. H. Hannay and A. M. Ozorio de Almeida. Periodic orbits and a correlation function for the semiclassical density of states. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 17(18) :3429, 1984.
- C. J. Hansen, S. D. Kawaler, and V. Trimble. *Stellar Interiors : Physical Principles, Structure, and Evolution*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 2004. URL <https://www.springer.com/gp/book/9780387200897>.
- R. U. Haq, A. Pandey, and O. Bohigas. Fluctuation Properties of Nuclear Energy Levels : Do Theory and Experiment Agree? *Physical Review Letters*, 48(16) :1086–1089, April 1982. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.1086>.
- S. B. Howell, C. Sobeck, M. Haas, M. Still, T. Barclay, F. Mullally, J. Troeltzsch, S. Aigrain, S. T. Bryson, D. Caldwell, W. J. Chaplin, W. D. Cochran, D. Huber, G. W. Marcy, A. Miglio, J. R. Najita, M. Smith, J. D. Twicken, and J. J. Fortney. The K2 Mission : Characterization and Early Results. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 126(938) :398, April 2014. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/676406/meta>.
- K. Husimi. Some formal properties of the density matrix. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, 22(4) :264–314, 1940.
- J. H. Jensen. Convergence of the semiclassical approximation for chaotic scattering. *Physical Review Letters*, 73(2) :244, 1994.
- A. Jiménez. An Estimation of the Acoustic Cutoff Frequency of the Sun Based on the Properties of the Low-Degree Pseudomodes. *The Astrophysical Journal*, 646(2) :1398, August 2006. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...646.1398J/abstract>.
- C. H. Joyner, S. Müller, and M. Sieber. GSE statistics without spin. *EPL (Europhysics Letters)*, 107(5) :50004, September 2014. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/107/50004>.
- M. Kac. Can One Hear the Shape of a Drum? *The American Mathematical Monthly*, 73(4P2) :1–23, April 1966. URL <https://doi.org/10.1080/00029890.1966.11970915>.
- J. B. Keller. Semiclassical Mechanics. *SIAM Review*, 27(4) :485–504, 1985. URL <https://www.jstor.org/stable/2031056>.
- R. Kippenhahn and A. Weigert. *Stellar Structure and Evolution*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990. URL <https://www.springer.com/gp/book/9783540580133>.

- H. Kjeldsen, T. R. Bedding, and J. Christensen-Dalsgaard. Correcting Stellar Oscillation Frequencies for Near-Surface Effects. *The Astrophysical Journal Letters*, 683(2) : L175, July 2008. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/591667/meta>.
- D. G. Koch, W. J. Borucki, G. Basri, N. M. Batalha, T. M. Brown, D. Caldwell, J. Christensen-Dalsgaard, W. D. Cochran, E. DeVore, E. W. Dunham, T. N. Gautier III, J. C. Geary, R. L. Gilliland, A. Gould, J. Jenkins, Y. Kondo, D. W. Latham, J. J. Lissauer, G. Marcy, D. Monet, D. Sasselov, A. Boss, D. Brownlee, J. Caldwell, A. K. Dupree, S. B. Howell, H. Kjeldsen, S. Meibom, D. Morrison, T. Owen, H. Reitsema, J. Tarter, S. T. Bryson, J. L. Dotson, P. Gazis, M. R. Haas, J. Kolodziejczak, J. F. Rowe, J. E. Van Cleve, C. Allen, H. Chandrasekaran, B. D. Clarke, J. Li, E. V. Quintana, P. Tenenbaum, J. D. Twicken, and H. Wu. Kepler Mission Design, Realized Photometric Performance, and Early Science. *The Astrophysical Journal Letters*, 713(2) :L79, 2010. URL <http://stacks.iop.org/2041-8205/713/i=2/a=L79>.
- C. Kollath, G. Roux, G. Biroli, and A. M. Läuchli. Statistical properties of the spectrum of the extended Bose–Hubbard model. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2010(08) :P08011, August 2010.
- P. Kos, M. L., and T. Prosen. Many-body quantum chaos : Analytic connection to random matrix theory. *Physical Review X*, 8(2) :021062, June 2018. URL <https://journals.aps.org/prx/abstract/10.1103/PhysRevX.8.021062>.
- A. Kudrolli, S. Sridhar, A. Pandey, and R. Ramaswamy. Signatures of chaos in quantum billiards : Microwave experiments. *Physical Review E*, 49(1) :R11–R14, January 1994. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.49.R11>.
- L. D. Landau and L. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics Non-Relativistic Theory, Third Edition : Volume 3*. Butterworth-Heinemann, 1981.
- P. Ledoux. The Nonradial Oscillations of Gaseous Stars and the Problem of Beta Canis Majoris. *The Astrophysical Journal*, 114 :373, November 1951. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1951ApJ...114..373L>.
- F. Leyvraz, C. Schmit, and T. H. Seligman. Anomalous spectral statistics in a symmetrical billiard. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 29(22) :L575–L580, November 1996. URL <https://doi.org/10.1088%2F0305-4470%2F29%2F22%2F004>.
- A. Lichtenberg and M. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1992. URL <https://www.springer.com/gp/book/9780387977454>.
- F. Lignieres, B. Georgeot, and J. Ballot. P-modes in rapidly rotating stars – looking for regular patterns in synthetic asymptotic spectra. *Astronomische Nachrichten*, 331(9-10) :1053–1056, December 2010. URL <http://arxiv.org/abs/1009.5939>.
- F. Lignières and B. Georgeot. Wave chaos in rapidly rotating stars. *Physical Review E*, 78(1) :016215, July 2008. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.78.016215>.

- F. Lignières and B. Georgeot. Asymptotic analysis of high-frequency acoustic modes in rapidly rotating stars. *Astronomy and Astrophysics*, 500(3) :1173, June 2009.
- F. Lignières, M. Rieutord, and D. Reese. Acoustic oscillations of rapidly rotating polytropic stars - I. Effects of the centrifugal distortion. *Astronomy and Astrophysics*, 455(2) :607–620, August 2006. URL <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2006/32/aa5015-06/aa5015-06.html>.
- S. T. Loi and J. C. B. Papaloizou. Effects of a strong magnetic field on internal gravity waves : trapping, phase mixing, reflection, and dynamical chaos. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 477 :5338–5357, July 2018. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2018MNRAS.477.5338L>.
- K. B. MacGregor, Stephen Jackson, Andrew Skumanich, and Travis S. Metcalfe. On the Structure and Properties of Differentially Rotating, Main-Sequence Stars in the  $1\text{--}2M_{\odot}$  Range. *The Astrophysical Journal*, 663(1) :560–572, July 2007. URL <https://doi.org/10.1086%2F518303>.
- R. S. Mackay, J. D. Meiss, and I. C. Percival. Resonances in area-preserving maps. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 27(1) :1–20, July 1987. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278987900029>.
- A. Maeder. *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009. URL <https://www.springer.com/gp/book/9783540769484>.
- J. D. Meiss. Symplectic maps, variational principles, and transport. *Reviews of Modern Physics*, 64(3) :795–848, July 1992. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.64.795>.
- E. Michel, M.-A. Dupret, D. R. Reese, R.-M. Ouazzani, J. Debosscher, A. García Hernández, K. Belkacem, R. Samadi, S. Salmon, and J. C. Suarez. What CoRoT tells us about  $\delta$  Scuti stars. Existence of a regular pattern and seismic indices to characterize stars. In *European Physical Journal Web of Conferences*, volume 160 of *European Physical Journal Web of Conferences*, page 03001, Oct 2017.
- G. M. Mirouh, D. R. Reese, F. Espinosa Lara, J. Ballot, and M. Rieutord. Asteroseismology of fast-rotating stars : the example of alpha Ophiuchi. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 9(S301) :455–456, August 2013. URL <https://www.cambridge.org/core/journals/proceedings-of-the-international-astronomical-union/article/asteroseismology-of-fastrotating-stars-the-example-of-ophiuchi/40C644D8D55D13AC48949BAA4B085156>.
- G. M. Mirouh, G. C. Angelou, D. R. Reese, and G. Costa. Mode classification in fast-rotating stars using a convolutional neural network : model-based regular patterns in  $\delta$  Scuti stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters*, 483(1) :L28–L32, February 2019. URL <https://academic.oup.com/mnrasl/article-abstract/483/1/L28/5181347?redirectedFrom=fulltext>.

- J. D. Monnier, M. Zhao, E. Pedretti, N. Thureau, M. Ireland, P. Muirhead, J.-P. Berger, R. Millan-Gabet, G. Van Belle, T. ten Brummelaar, H. McAlister, S. Ridgway, N. Turner, L. Sturmann, J. Sturmann, and D. Berger. Imaging the Surface of Altair. *Science*, 317(5836) :342–345, July 2007. URL <http://science.sciencemag.org/content/317/5836/342>.
- F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, Bala Sundaram, and M. G. Raizen. Atom Optics Realization of the Quantum  $\delta$ -Kicked Rotor. *Physical Review Letters*, 75(25) :4598–4601, December 1995. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4598>.
- P. Moskalik and W. A. Dziembowski. New opacities and the origin of the Beta Cephei pulsation. *Astronomy and Astrophysics*, 256 :L5–L8, March 1992. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/1992A%26A...256L...5M>.
- B. Mosser, M. J. Goupil, K. Belkacem, J. P. Marques, P. G. Beck, S. Bloemen, J. De Ridder, C. Barban, S. Deheuvels, Y. Elsworth, S. Hekker, T. Kallinger, R. M. Ouazzani, M. Pinsonneault, R. Samadi, D. Stello, R. A. García, T. C. Klaus, J. Li, S. Mathur, and R. L. Morris. Spin down of the core rotation in red giants. *Astronomy and Astrophysics*, 548 :A10, December 2012. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2012A%26A...548A..10M>.
- V. Oganessian and D. A. Huse. Localization of interacting fermions at high temperature. *Physical Review B*, 75(15) :155111, April 2007.
- J. Osaki. Nonradial oscillations of a 10 solar mass star in the main-sequence stage. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 27 :237–258, 1975. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1975PASJ...27..237O>.
- E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems - 2nd Edition*. August 2002. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002cds...book....0>.
- R.-M. Ouazzani, M.-A. Dupret, and D. R. Reese. Pulsations of rapidly rotating stars - I. The ACOR numerical code. *Astronomy and Astrophysics*, 547 :A75, November 2012. URL <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2012/11/aa19548-12/aa19548-12.html>.
- R.-M. Ouazzani, I. W. Roxburgh, and M.-A. Dupret. Pulsations of rapidly rotating stars - II. Realistic modelling for intermediate-mass stars. *Astronomy and Astrophysics*, 579 :A116, July 2015. URL <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2015/07/aa25734-15/aa25734-15.html>.
- J. I. Palmore and J. L. McCauley. Shadowing by computable chaotic orbits. *Physics Letters A*, 122(8) :399–402, June 1987. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960187907365>.
- M. Paparó, J. M. Benk\Ho, M. Hareter, and J. A. Guzik. UNEXPECTED SERIES OF REGULAR FREQUENCY SPACING OF  $\delta$  SCUTI STARS IN THE NON-ASYMPTOTIC REGIME. I. THE METHODOLOGY. *The Astrophysical Journal*, 822(2) :100, May 2016. URL <https://doi.org/10.3847/2F0004-637x%2F822%2F2%2F100>.

- M. Pasek. *Application des méthodes du chaos quantique aux oscillations d'étoiles en rotation rapide*. thesis, Toulouse 3, January 2012. URL <http://www.theses.fr/2012TOU30235>.
- M. Pasek, B. Georgeot, F. Lignières, and D. R. Reese. Regular Modes in Rotating Stars. *Physical Review Letters*, 107(12) :121101, September 2011. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.121101>.
- M. Pasek, F. Lignières, B. Georgeot, and D. R. Reese. Regular oscillation sub-spectrum of rapidly rotating stars. *Astronomy and Astrophysics*, 546 :A11, 2012.
- I. C. Percival. Regular and irregular spectra. *Journal of Physics B : Atomic and Molecular Physics*, 6(9) :L229–L232, September 1973.
- J. Perdang. Asymptotics and Quantum Chaos in Stellar Oscillations. In D. O. Gough, editor, *Seismology of the Sun and the Distant Stars*, NATO ASI Series, pages 141–171. Springer Netherlands, Dordrecht, 1986. doi : 10.1007/978-94-009-4608-8\_15. URL [https://doi.org/10.1007/978-94-009-4608-8\\_15](https://doi.org/10.1007/978-94-009-4608-8_15).
- W. D. Pesnell. A new driving mechanism for stellar pulsations. 314 :598–604, March 1987. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1987ApJ...314..598P>.
- V. Prat, F. Lignières, and J. Ballot. Asymptotic theory of gravity modes in rotating stars - I. Ray dynamics. *Astronomy and Astrophysics*, 587 :A110, March 2016. URL <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2016/03/aa27737-15/aa27737-15.html>.
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical recipes fortran 77 art scientific computing volume 1 2nd edition / Numerical recipes*.
- H. Rauer, C. Catala, C. Aerts, T. Appourchaux, W. Benz, A. Brandeker, J. Christensen-Dalsgaard, M. Deleuil, L. Gizon, M.-J. Goupil, M. Güdel, E. Janot-Pacheco, M. Mas-Hesse, I. Pagano, G. Piotto, D. Pollacco, C. Santos, A. Smith, J.-C. Suárez, R. Szabó, S. Udry, V. Adibekyan, Y. Alibert, J.-M. Almenara, P. Amaro-Seoane, M. Ammler-von Eiff, M. Asplund, E. Antonello, S. Barnes, F. Baudin, K. Belkacem, M. Bergemann, G. Bihain, A. C. Birch, X. Bonfils, I. Boisse, A. S. Bonomo, F. Borsa, I. M. Brandão, E. Brocato, S. Brun, M. Burleigh, R. Burston, J. Cabrera, S. Cassisi, W. Chaplin, S. Charpinet, C. Chiappini, R. P. Church, Sz. Csizmadia, M. Cunha, M. Damasso, M. B. Davies, H. J. Deeg, R. F. Díaz, S. Dreizler, C. Dreyer, P. Eggenberger, D. Ehrenreich, P. Eigmüller, A. Erikson, R. Farmer, S. Feltzing, F. de Oliveira Fialho, P. Figueira, T. Forveille, M. Fridlund, R. A. García, P. Giommi, G. Giuffrida, M. Godolt, J. Gomes da Silva, T. Granzer, J. L. Grenfell, A. Grottsch-Noels, E. Günther, C. A. Haswell, A. P. Hatzes, G. Hébrard, S. Hekker, R. Helled, K. Heng, J. M. Jenkins, A. Johansen, M. L. Khodachenko, K. G. Kislyakova, W. Kley, U. Kolb, N. Krivova, F. Kupka, H. Lammer, A. F. Lanza, Y. Lebreton, D. Magrin, P. Marcos-Arenal, P. M. Marrese, J. P. Marques, J. Martins, S. Mathis, S. Mathur, S. Messina, A. Miglio, J. Montalbán, M. Montalto, M. J. P. F. G. Monteiro, H. Moradi, E. Moravveji, C. Mordasini, T. Morel, A. Mortier, V. Nascimbeni, R. P. Nelson, M. B. Nielsen, L. Noack, A. J. Norton, A. Ofri, M. Oshagh, R.-M. Ouazzani, P. Pápics, V. C. Parro, P. Petit, B. Plez, E. Poretti,



- A. Quirrenbach, R. Ragazzoni, G. Raimondo, M. Rainer, D. R. Reese, R. Redmer, S. Reffert, B. Rojas-Ayala, I. W. Roxburgh, S. Salmon, A. Santerne, J. Schneider, J. Schou, S. Schuh, H. Schunker, A. Silva-Valio, R. Silvotti, I. Skillen, I. Snellen, F. Sohl, S. G. Sousa, A. Sozzetti, D. Stello, K. G. Strassmeier, M. Švanda, Gy. M. Szabó, A. Tkachenko, D. Valencia, V. Van Grootel, S. D. Vauclair, P. Ventura, F. W. Wagner, N. A. Walton, J. Weingrill, S. C. Werner, P. J. Wheatley, and K. Zwintz. The PLATO 2.0 mission. *Experimental Astronomy*, 38 :249–330, November 2014. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014ExA...38..249R>.
- D. Reese, F. Lignières, and M. Rieutord. Acoustic oscillations of rapidly rotating polytropic stars. *Astronomy and Astrophysics*, 455(2) :621, August 2006.
- D. Reese, F. Lignières, and M. Rieutord. Regular patterns in the acoustic spectrum of rapidly rotating stars. *Astronomy and Astrophysics*, 481 :449–452, April 2008. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2008A%26A...481..449R>.
- D. R. Reese, K. B. MacGregor, S. Jackson, A. Skumanich, and T. S. Metcalfe. Pulsation modes in rapidly rotating stellar models based on the self-consistent field method. *Astronomy and Astrophysics*, 506(1) :189–201, October 2009. URL <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2009/40/aa11510-08/aa11510-08.html>.
- D. R. Reese, V. Prat, C. Barban, C. van 't Veer-Menneret, and K. B. MacGregor. Mode visibilities in rapidly rotating stars. *Astronomy and Astrophysics*, 550 :A77, February 2013. URL <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2013/02/aa20506-12/aa20506-12.html>.
- D. R. Reese, F. Lignières, J. Ballot, M.-A. Dupret, C. Barban, C. van 't Veer-Menneret, and K. B. MacGregor. Frequency regularities of acoustic modes and multi-colour mode identification in rapidly rotating stars. *Astronomy and Astrophysics*, 601 :A130, May 2017. URL <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2017/05/aa21264-13/aa21264-13.html>.
- Daniel Reese. *La modélisation des oscillations d'étoiles en rotation rapide*. thesis, Toulouse 3, January 2006. URL <http://www.theses.fr/2006TOU30154>.
- G. R. Ricker, J. N. Winn, R. Vanderspek, D. W. Latham, G. A. Bakos, J. L. Bean, Z. K. Berta-Thompson, T. M. Brown, L. Buchhave, N. R. Butler, R. P. Butler, W. J. Chaplin, D. Charbonneau, J. Christensen-Dalsgaard, M. Clampin, D. Deming, J. Doty, N. De Lee, C. Dressing, E. W. Dunham, M. Endl, F. Fressin, J. Ge, T. Henning, M. J. Holman, A. W. Howard, S. Ida, J. M. Jenkins, G. Jernigan, J. A. Johnson, L. Kaltenegger, N. Kawai, H. Kjeldsen, G. Laughlin, A. M. Levine, D. Lin, J. J. Lissauer, P. MacQueen, G. Marcy, P. R. McCullough, T. D. Morton, N. Narita, M. Paegert, E. Palte, F. Pepe, J. Pepper, A. Quirrenbach, S. A. Rinehart, D. Sasselov, B. Sato, S. Seager, A. Sozzetti, K. G. Stassun, P. Sullivan, A. Szentgyorgyi, G. Torres, S. Udry, and J. Villaseñor. Transiting Exoplanet Survey Satellite (TESS). 1 :014003, January 2015.
- M. Rieutord and F. Espinosa Lara. Ab Initio Modelling of Steady Rotating Stars. volume 865, page 49, eprint : arXiv :1208.4926, 2013. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2013LNP...865...49R>.

- M. Rieutord, B. Dintrans, F. Lignières, T. Corbard, and B. Pichon. The Ester Project. *Semaine de l'Astrophysique Française, ad. Combes et al., Conference Series*, page 759, 2005.
- M. Rieutord, F. Espinosa Lara, and B. Putigny. An algorithm for computing the 2d structure of fast rotating stars. *Journal of Computational Physics*, 318 :277–304, August 2016. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2016JCoPh.318..277R>.
- I. W. Roxburgh. 2-dimensional models of rapidly rotating stars. II. Hydrostatic and acoustic models with  $\theta=\theta(r,\theta)$ . *Astronomy and Astrophysics*, 454(3) :883, August 2006. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2006A%26A...454..883R/abstract>.
- F. Royer. On the Rotation of A-Type Stars. In J.-P. Rozelot and C. Neiner, editors, *The Rotation of Sun and Stars*, Lecture Notes in Physics, pages 207–230. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009. URL [https://doi.org/10.1007/978-3-540-87831-5\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-87831-5_9).
- Y. Saad and V. Mehrmann. Numerical methods for large eigenvalue problems. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 97(3) :62–62, 1995.
- H. Saio. Rotational and tidal perturbations of nonradial oscillations in a polytropic star. *The Astrophysical Journal*, 244 :299–315, February 1981. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1981ApJ...244..299S>.
- H. Saio, D. W. Kurtz, S. J. Murphy, V. L. Antoci, and U. Lee. Theory and evidence of global Rossby waves in upper main-sequence stars : r-mode oscillations in many Kepler stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 474 :2774–2786, February 2018. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2018MNRAS.474.2774S>.
- E. Schatzman. A Theory of the Role of Magnetic Activity During Star Formation, January 1960.
- C. Schmit. *Quantum and classical properties of some billiards on the hyperbolic plane*, pages 331–369. M.-J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin, Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics, LII. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- J.-B. Shim, J. Wiersig, and H. Cao. Whispering gallery modes formed by partial barriers in ultrasmall deformed microdisks. *Physical Review E*, 84(3) :035202, September 2011. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.84.035202>.
- M. Sieber and K. Richter. Correlations between periodic orbits and their rôle in spectral statistics. *Physica Scripta*, 2001(T90) :128, 2001. URL <http://iopscience.iop.org/article/10.1238/Physica.Topical.090a00128/meta>.
- F. Soufi, M. J. Goupil, and W. A. Dziembowski. Effects of moderate rotation on stellar pulsation. I. Third order perturbation formalism. *Astronomy and Astrophysics*, 334 : 911–924, June 1998. URL <http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/1998A%26A...334..911S>.

- J. Stein and H.-J. Stöckmann. Experimental determination of billiard wave functions. *Physical Review Letters*, 68(19) :2867–2870, May 1992. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.68.2867>.
- A. D. Stone. Einstein’s Unknown Insight and the Problem of Quantizing Chaos. 2005.
- S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos : With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering*. Westview Press, Cambridge, Mass, January 2001.
- M. Tassoul. Asymptotic approximations for stellar nonradial pulsations. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 43 :469–490, August 1980. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1980ApJS...43..469T>.
- M. J. Thompson, J. Toomre, E. R. Anderson, H. M. Antia, G. Berthomieu, D. Burdonclay, S. M. Chitre, J. Christensen-Dalsgaard, T. Corbard, M. DeRosa, C. R. Genovese, D. O. Gough, D. A. Haber, J. W. Harvey, F. Hill, R. Howe, S. G. Korzennik, A. G. Kosovichev, J. W. Leibacher, F. P. Pijpers, J. Provost, E. J. Rhodes, J. Schou, T. Sekii, P. B. Stark, and P. R. Wilson. Differential Rotation and Dynamics of the Solar Interior. *Science*, 272(5266) :1300–1305, May 1996. URL <https://science.sciencemag.org/content/272/5266/1300>.
- P. H. Tuan, C. P. Wen, P. Y. Chiang, Y. T. Yu, H. C. Liang, K. F. Huang, and Y. F. Chen. Exploring the resonant vibration of thin plates : Reconstruction of Chladni patterns and determination of resonant wave numbers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(4) :2113–2123, April 2015. URL <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.4916704>.
- S. Turck-Chièze, S. Couvidat, L. Piau, J. Ferguson, P. Lambert, J. Ballot, R. A. García, and P. Nghiem. Surprising Sun : A New Step Towards a Complete Picture ? *Physical Review Letters*, 93(21) :211102, November 2004. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.211102>.
- D. Ullmo and S. Tomsovic. Introduction to quantum chaos, 2014.
- W. Unno. *Nonradial oscillations of stars*. University of Tokyo Press, Tokyo, 1989. OCLC : 715563021.
- G. T. van Belle. Interferometric observations of rapidly rotating stars. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 20(1) :51, March 2012. URL <https://doi.org/10.1007/s00159-012-0051-2>.
- Yu. V. Vandakurov. The Frequency Distribution of Stellar Oscillations. *Astronomicheskii Zhurnal*, 44 :786, 1967. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1967AZh...44..786V>.
- P. B. Warner, A. B. Kaye, and J. A. Guzik. A Theoretical  $\gamma$  Doradus Instability Strip. *The Astrophysical Journal*, 593(2) :1049, August 2003. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/376727/meta>.
- T. R. White, T. R. Bedding, D. Stello, J. Christensen-Dalsgaard, D. Huber, and H. Kjeldsen. CALCULATING ASTEROSEISMIC DIAGRAM FOR SOLAR-LIKE

OSCILLATIONS. *The Astrophysical Journal*, 743(2) :161, December 2011. URL <https://doi.org/10.1088%2F0004-637x%2F743%2F2%2F161>.

E. Wigner. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium. *Physical Review*, 40(5) :749–759, June 1932. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.40.749>.





## Résumé

L'astérosismologie permet d'obtenir des informations sur la structure interne des étoiles par l'étude de leurs pulsations. Parmi les cibles des satellites CoRot, Kepler ou Tess, il y a une part importante d'étoiles en rotation rapide dont le spectre est encore difficile à exploiter. La mauvaise compréhension de la structure du spectre est l'une des raisons de cette difficulté. Les méthodes asymptotiques sont efficaces pour comprendre l'organisation du spectre et la relier aux propriétés physiques de l'étoile. Asymptotiquement, la propagation des rayons acoustiques est décrite par un système Hamiltonien. Si l'étoile est quasi sphérique, la dynamique du système est complètement intégrable. Toutefois, la rotation aplattit l'étoile, ce qui entraîne une transition de la dynamique vers un régime mixte avec à la fois des zones intégrables et des zones chaotiques dans l'espace des phases.

Dans cette thèse nous étudions les modes propres d'oscillation associés aux régions chaotiques de l'espace des phases. Les modes chaotiques usuellement étudiés, e.g. dans les billards quantiques ou les cavités optiques, ont un spectre irrégulier qui suit une distribution statistique prédite par la théorie des matrices aléatoires. Les étoiles se distinguent de ces systèmes par le fait que le milieu stellaire est fortement inhomogène. En particulier la vitesse du son est plus faible en surface de plusieurs ordres de grandeurs par rapport au cœur. Ainsi, le temps de parcours entre deux rebonds est approximativement le même pour tous les rayons acoustiques. En utilisant les outils du chaos quantique, nous montrons que cet effet provoque un espacement régulier des fréquences dans le spectre des modes chaotiques, que l'on peut relier à une moyenne de la vitesse du son dans l'intérieur stellaire. Ce résultat permet de mieux comprendre la structure asymptotique du spectre des modes de pression dans les étoiles en rotation rapide.

## Abstract

Asteroseismology provides information on the internal structure of stars by studying their pulsations. Among the targets of CoRot, Kepler or Tess satellites, there is an important part of rapidly rotating stars whose spectrum is still difficult to exploit. The poor understanding of the spectrum structure is one of the reasons for this difficulty. Asymptotic methods are effective to understand the organization of the spectrum and relate it to the physical properties of the star. Asymptotically, the propagation of acoustic rays is described by a Hamiltonian system. If the star is almost spherical, the dynamics of the system is completely integrable. However, the rotation flattens the star, resulting in a transition of the dynamics to a mixed regime with both integrable zones and chaotic zones in the phase space.

In this thesis we study the oscillation modes associated with chaotic regions of phase space. The chaotic modes usually studied, e.g. in quantum billiards or optical cavities, have an irregular spectrum which follows a statistical distribution predicted by Random Matrix Theory. Stars differ from these systems by the fact that the stellar medium is highly inhomogeneous. In particular the sound speed is smaller near the surface by several orders of magnitude compared to the core. Thus, the travel time between two rebounds is approximately the same for all acoustic rays. Using the tools of quantum chaos, we show that this effect causes a regular spacing of frequencies in the spectrum of chaotic modes, which can be linked to an average sound speed in the stellar interior. This result provides a better understanding of the asymptotic structure of the spectrum of p-modes in rapid rotators.